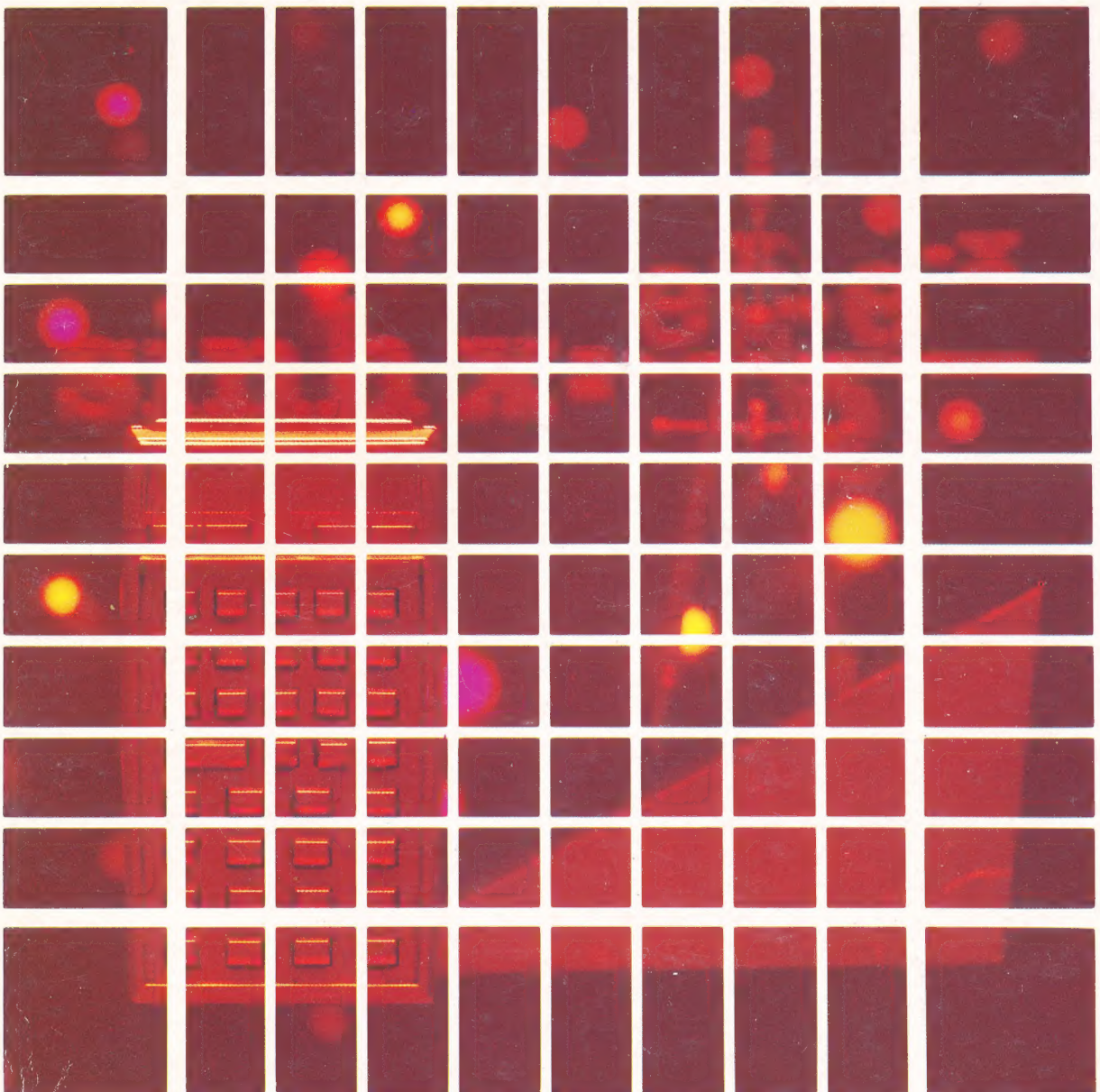


HEWLETT-PACKARD

HP-41C

MATHEMATIK-PAKET



### **Hinweis**

Das hierin enthaltene Material ist mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. HEWLETT-PACKARD übernimmt infolgedessen keine Verantwortung und wird keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Programmsammlung oder Teilen davon entsteht.

# HEWLETT-PACKARD bittet um Ihre Aufmerksamkeit

Um die Software-Unterstützung zu verbessern, bitten Sie die HP-Applikationsingenieure um Ihre Hilfe. Ihre frühzeitige Antwort hilft uns, die Qualität der Software und existierende Programm-Pakete zu verbessern. Ihre Beantwortung dieses Fragebogens ist äußerst wertvoll für uns.

- 1. Name des Paketes: Mathematik
- 2. Wie bedeutsam war die Verfügbarkeit dieses Paketes für den Kauf eines Hewlett-Packard Rechners?  
☐ hätte ihn ohne dieses Programm-Paket nicht gekauft  
☐ wichtig    ☐ unwichtig
- 3. Was ist das Hauptanwendungsgebiet für dieses Paket?

4. Geben Sie bitte in der untenstehenden Liste den von Ihnen empfundenen Gebrauchswert der Programme an:

PROGRAMM-NUMMER	WESENTLICH	WICHTIG, ABER NICHT ERFORDERLICH	UNREGELMÄSSIG GEBRAUCHT	NIE VERWENDET
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

PROGRAMM-NUMMER	WESENTLICH	WICHTIG, ABER NICHT ERFORDERLICH	UNREGELMÄSSIG GEBRAUCHT	NIE VERWENDET
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				

- 5. Haben Sie einen Drucker gekauft?    ☐ ja    ☐ nein  
    Wenn ja, ist das Druckformat dieses Paketes zweckmäßig ☐ ja ☐ nein
- 6. Welche Programme fehlen nach Ihrer Meinung in diesem Paket?

7. Welche weiteren Programm-Pakete wünschen Sie sich?

DANKE FÜR IHRE ZEIT UND MITARBEIT.

Name Stellung

Firma

Straße (Land)

PLZ, Stadt Telefon

## **Zusätzliche Bemerkungen**

**Hewlett-Packard SA  
PERSONAL CALCULATOR DIVISION  
P. O. Box  
CH 1217 Meyrin 2 – Geneva**



## EINLEITUNG

Die Programme des Mathematik-Pakets stammen aus den Gebieten Funktionentheorie, numerische Verfahren, lineare Gleichungssysteme, analytische Geometrie und ausgewählte Funktionen. Jedes Programm dieses Pakets besteht aus einem eigenständigen Programm im Anwender-Modul und einem Abschnitt in dem vorliegenden Bedienungshandbuch. Das Bedienungshandbuch enthält die wichtigsten Gleichungen und die Anweisungen zur Benutzung des Programms. Außerdem werden eines oder mehrere durchgerechnete Beispiele mit der zur Lösung benötigten Liste von Tastenfolgen beigelegt.

**Schalten Sie bitte den Rechner dann ab**, wenn Sie ein Anwender-Modul einstecken und vergewissern Sie sich, daß Sie mit dem Abschnitt „Einstecken und Entfernen der Anwender-Module“ vertraut sind. Wenn Sie ein Programm verwenden wollen, so sollten Sie sich die Zeit nehmen, die Abschnitte „Format der Benutzer-Anweisungen“ und „Einige Anmerkungen zur Programm-Verwendung“ durchzulesen.

Zunächst sollten Sie ein Programm dadurch kennenlernen, daß Sie es ein- oder zweimal anhand der vollständigen Liste von Benutzeranweisungen durchlaufen lassen. Danach genügen Ihnen sicher die Anzeigen des Programms oder die Kürzel auf den mitgelieferten Masken für das Tastenfeld, aus denen hervorgeht, welche Variablen einzugeben, welche Tasten zu drücken sind und welche Werte ausgegeben werden. Zur Erleichterung Ihrer Arbeit haben wir eine Karte mit Kurzbeschreibungen für jedes Programm – einschließlich der Benutzer-Anweisungen – beigelegt.

Wir hoffen, daß Sie von dem Mathematik-Paket bei der Lösung zahlloser Probleme ihres Fachgebietes unterstützt werden. Eine Bitte noch: Wir sind sehr daran interessiert, Ihre Bewertung der Programme dieses Pakets zu erfahren, weswegen wir einen Fragebogen vorbereitet haben, der sich in der vorderen Umschlagdecke des Bedienungshandbuches befindet. Dürfen wir Sie bitten, diesen Fragebogen mit Ihren Kommentaren zu diesen Programmen auszufüllen? Eben aus Ihren Kommentaren können wir lernen, wie wir die Brauchbarkeit und den Wert unserer Programme verbessern können.

# INHALT


Einleitung .....	1
Inhaltsverzeichnis .....	2
Einstecken und Entfernen der Anwender-Module.....	4
Format der Benutzer-Anweisungen .....	6
Einige Anmerkungen zur Programm-Verwendung .....	8
Matrixalgebra .....	10
Es werden Determinante und Inverse für Matrizen bis zu 14 Reihen und die Lösungen für simultane Gleichungen bis zu 14 Unbekannten bestimmt.	
Lösungen für $f(x)=0$ in einem Intervall .....	17
Dieses Programm verwendet einen abgekürzten NEWTON-Algorithmus, um die Lösungen einer gegebenen Gleichung zu finden.	
Nullstellen und Funktionswerte von Polynomen .....	21
Im Programm werden alle Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten höchstens fünften Grades bestimmt. Es können auch Funktionswerte für beliebiges $x$ berechnet werden.	
Numerische Integration .....	25
Das Programm leistet die numerische Integration sowohl für explizite Funktionen, als auch für eine endliche Anzahl von Punkten gleichen Abstands (diskrete Werte). Die Integrale expliziter Funktionen werden nach SIMPSON, diskrete Fälle entweder nach der Trapez-Regel oder nach der SIMPSONschen Regel bearbeitet.	
Differentialgleichungen .....	29
In diesem Programm werden Differentialgleichungen ersten und zweiten Grades nach der RUNGE-KUTTA-Methode gelöst.	
Fourier-Analyse .....	34
Dieses Programm berechnet Fourier-Koeffizienten aus Stichproben periodischer Funktionen. Bis zu zehn Koeffizientenpaare können simultan aus $N$ gleichabständigen Ordinatenwerten berechnet werden. Die Koeffizienten können sowohl als kartesische als auch als Polar-Koordinaten ausgegeben werden.	
Komplexe Operationen .....	38
Diese Programmsammlung ist für konjugiert komplexe Zahlen bestimmt. Neben den vier Grundrechnungsarten (+, -, $\times$ , $\div$ ) können die gebräuchlichsten Funktionen der komplexen Variablen $z$ und $w$ bestimmt werden (wie: $ z $ , $1/z$ , $z^n$ , $z^{1/n}$ , $e^z$ , $\ln z$ , $\sin z$ , $\cos z$ , $\tan z$ , $a^z$ , $\log a^z$ , $z^{1/w}$ und $z^w$ ).	



<b>Hyperbolische Funktionen</b> .....	44
Dieses Programm berechnet die hyperbolischen Funktionen $\sinh x$ , $\cosh x$ , $\tanh x$ , sowie deren Inverse.	
<b>Dreiecksbestimmungen</b> .....	46
Diese Programme bestimmen Fläche, Seitenlänge und Winkel für jedes definierte ebene Dreieck.	
<b>Koordinatentransformation</b> .....	52
Dieses Programm leistet 2- und 3-dimensionale Koordinaten-Translation und/oder Achsenrotation.	
<b>Anhang A</b> .....	57
<b>Anhang B</b> .....	59

## EINSTECKEN UND ENTFERNEN DER ANWENDER-MODULE

Machen Sie sich bitte mit der nachfolgenden Information vertraut, **bevor** Sie ein Anwender-Modul zum ersten Mal einstecken.

Es können bis zu vier Anwender-Module in die Buchsen des HP-41C eingesteckt werden. Sind diese Module eingesteckt, so können die Namen ihrer Programme durch das Drücken von  **CATALOG** 2 in die Anzeige abgerufen werden.

### VORSICHT

Schalten Sie den HP-41C immer vor dem Einstecken oder Entfernen einer steckbaren Erweiterung (Anwender-Modul oder auch Zubehör) aus. Versäumen Sie das Ausschalten, so kann sowohl der Rechner als auch das Zubehör beschädigt werden.

Im folgenden ist beschrieben, wie Sie ihr Anwender-Modul einstecken müssen:

1. Schalten Sie den HP-41C aus! Versäumen Sie dies, so kann außer dem Modul auch der Rechner beschädigt werden.



2. Entfernen Sie die Schutzkappen auf den Buchsen. Bewahren sie die Schutzkappen auf, da freie Buchsen durch diese Kappen verschlossen werden sollen.



3. Stecken Sie das Anwender-Modul in eines der Buchsen, jedoch immer **nach** dem letzten verwendeten Speichererweiterungsmodul.





4. Wollen Sie weitere Anwender-Module einstecken, so können diese in jede beliebige Buchse eingesteckt werden, jedoch immer nach dem letzten Speichererweiterungs-Modul. Haben Sie beispielsweise ein Speichererweiterungs-Modul (RAM) in Buchse 1 eingesteckt, so können Anwender-Module (ROM) nur in die Buchsen 2, 3 und 4 beliebig eingegeben werden. .

**Stecken Sie niemals ein Anwender-Modul in eine Buchse mit niedrigerer Nummer, als ein Speichererweiterungsmodul.**

Vergewissern Sie sich, daß freie Buchsen durch Schutzkappen verschlossen sind.

5. Schalten Sie den Rechner ein und folgen Sie den programmspezifischen Anweisungen dieses Handbuches.

Entfernen der Anwender-Module:

1. Schalten Sie den HP-41C aus! Versäumen Sie dies, so können Rechner und Modul beschädigt werden.
2. Nehmen Sie das entsprechende Modul und ziehen Sie es heraus, wie auf der Abbildung dargestellt.



3. Stecken Sie eine Schutzkappe auf die unbelegte Anschlußbuchse.

### **MISCHEN VON SPEICHERERWEITERUNGS- (RAM) UND ANWENDER-MODULEN (ROM).**

Die Auslegung des HP-41C erfordert es, daß RAM-Module in den Buchsen mit niedrigerer Nummer einzustecken sind. Dies gilt für alle Erweiterungen, auch für solche wie den HP-82104A Kartenleser oder den HP-82143A Drucker.

Verwenden Sie Speichererweiterungs-Module und Anwender-Module, so müssen die Speichererweiterungs-Module immer in die Buchsen mit der niedrigeren Nummer eingeschoben werden, die Anwender-Module in die Buchsen nach dem letzten Speichererweiterungsmodul. Wollen Sie RAMs und ROMs gemischt verwenden, so können Buchsen freigelassen werden. Beispielsweise, steckt in Buchse 1 ein RAM, so kann ein Anwender-Modul in Buchse 4 unter Auslassung der Buchsen 2 und 3 eingeschoben werden.



FORMAT DER BENUTZER-ANWEISUNGEN

Die vollständige Tabelle der Benutzer-Anweisungen – zu jedem Programm gibt es im Bedienungshandbuch eine Tabelle – enthält die Anleitung zur Bedienung eines jeden Programms aus diesem Paket.

Die Tabelle besteht aus fünf beschrifteten Spalten. Von links nach rechts gelesen, enthält die erste Spalte die laufende Nummer der Anweisung.

Die Spalte ANWEISUNG enthält die Anweisung und kommentiert die auszuführenden Schritte.

In der Spalte EINGABE sind die Eingabedaten spezifiziert, gegebenenfalls deren Maßeinheiten oder die entsprechende alphanumerische Reaktion auf eine Ihrer Antworten. Die Tasten für die Dateneingabe sind die Tasten für 0 bis 9 (numerische Tasten), [EEX] (Eingabe Exponent) und [CHS] (Vorzeichenwechsel).

Die Spalte FUNKTION gibt die Taste(n) an, die nach der Eingabe der entsprechenden Daten zu drücken sind.

Immer dann, wenn eine Angabe in den Spalten EINGABE oder FUNKTION goldfarben gedruckt ist, ist zuvor die [ALPHA]-Taste zu drücken. Sobald die Informationen eingetastet sind, muß wiederum die [ALPHA]-Taste betätigt werden, um den Rechner in seinem normalen Modus umzuschalten, oder auch um die Programmausführung zu starten. Beispielsweise meint [XEQ] FOUR [ALPHA], daß die Tastenfolge [XEQ] [ALPHA] FOUR [ALPHA] zu drücken ist.

Die Spalte ANZEIGE gibt die Reaktionen des Rechners sowie Zwischen- und Endergebnisse mit ihren Maßeinheiten an, sofern dies zutrifft.

Über der Spalte ANZEIGE steht ein Kasten, der die Mindestzahl von Registern (Speicherplätzen) enthält, die zur Programmausführung notwendig sind. Die Seiten 73 bis 117 des Bedienungs- und Programmierhandbuches enthalten detaillierte Informationen darüber, wie man die belegte Anzahl von Registern bestimmt.

Im folgenden ist die Tabelle von Benutzer-Anweisungen des Programms FOURIER-Analyse dargestellt.


Umfang: 027				
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		[XEQ] FOUR	NO.SAMPLES=?
2.	Anzahl der Stichproben einer Folge eingeben	# Stichp.	[R/S]	NO.FREQ=?
3.	Anzahl gewünschter Frequenzen eingeben	# Freq.	[R/S]	1ST.COEFF=?
4.	Exponent des ersten Koeffizienten (J).	=J	[R/S]	Y1=?
5.	Eingabe von $Y_n, n=1, \dots, N$	$Y_n$	[R/S]	Y2=?, ... ,RECT?

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
6.	Schritt 5 wiederholen bis RECT? in der Anzeige erscheint.			
7.	Ist die Antwort ja, drücken der Taste <b>R/S</b> um die Koeffizienten für $J \leq k \leq J + \#$ freqs. in kartesischen Koordinaten auszugeben.  ist die Antwort nein (N), werden die Koeffizienten in Polarform ausgegeben.  drücken von <b>R/S</b> zeigt aufeinanderfolgende Koeffizienten an.		<b>R/S</b> <b>R/S</b>	$a_k =$ $b_k =$
		N	<b>R/S</b> <b>R/S</b>	$c_k =$ $k =$
8.	Um den Funktionswert für t zu berechnen, USER-Modus setzen und t eingeben.	t	<b>USER</b> <b>E</b>	f(t)



## EINIGE ANMERKUNGEN ZUR PROGRAMM-VERWENDUNG

### KATALOG



Sobald ein Anwender-Modul in eine Buchse des HP-41C eingesteckt ist, kann sein Inhalt durch Drücken von  **CATALOG** 2 (der Katalog der Erweiterungen) ausgegeben werden. Drücken der **CATALOG**-Funktion bewirkt, daß eine Liste aller Programme und Funktionen des Moduls aber auch aller Funktionen jeder anderen eingesteckten Erweiterung ausgegeben wird.

### MASKEN

Für eine Anzahl der Programme des Pakets wurden Masken beigelegt. Um diese Programme zu benutzen, wählen Sie die entsprechende Maske und legen Sie sie auf den Rechner. Die Bezeichnungen auf den Masken sollen Ihnen bei der Verwendung des Programmes helfen. Der Programmname ist vertikal auf der linken Seite der Maske angegeben. Die Bezeichnungen in blau beziehen sich auf die unmittelbar über ihnen stehenden Tasten, wenn die Maske richtig plaziert ist und der Rechner im USER-Modus betrieben wird. Goldfarbene Bezeichnungen haben die gleiche Bedeutung, nur sind sie oberhalb der entsprechenden Taste angebracht, und zusätzlich ist vorher die Präfix-Taste zu drücken. Um es nochmals zu betonen, der USER-Modus muß eingestellt sein.

### ALPHA- und USER-Modus

In diesem Bedienungshandbuch ist eine besondere Notation verwendet, um den ALPHA-Modus zu kennzeichnen. Immer dann, wenn auf der Benutzer-Anweisungs-Tabelle eine Anweisung goldfarben gedruckt ist, muß vor der Anweisung die **ALPHA**-Taste gedrückt werden. Ist die Anweisung eingegeben, ist **ALPHA** nochmals zu drücken, um den Rechner in seinen normalen Betriebszustand zurückzusetzen oder eine Programmausführung zu starten. So bedeutet **XEQ** FOUR z. B., daß die Tasten **XEQ** **ALPHA** FOUR **ALPHA** zu drücken sind.

Im USER-Modus, bezogen auf die neudefinierten Tasten und deren obere Beschriftung, werden in diesem Bedienungshandbuch die Symbole **A** - **J** und  **A** -  **E** in Benutzer-Anweisungs-Tabellen und bei gelösten numerischen Beispielen verwendet.

### VERWENDUNG DES ZUSÄTZLICHEN DRUCKERS

Ist der als Zubehör erhältliche Drucker an den HP-41C angeschlossen, so werden alle Ergebnisse des Mathematik-Pakets Anwender-Moduls automatisch ausgedruckt. Wünschen Sie zusätzlich noch eine Liste aller Eingabewerte bei einem bestimmten Programm, so schieben Sie den Drucker-Wahlschalter in Stellung NORMAL, bevor Sie das Programm ausführen. In diesem Modus werden alle Eingaben und Tastenfolgen auf dem Drucker gelistet; somit verfügen Sie über eine vollständige Dokumentation der Programmausführung.

## **PROGRAMME ALS UNTERPROGRAMME**

Die Programme des Mathematik-Pakets können als Unterprogramme von Benutzerprogrammen im Speicher des HP-41C aufgerufen werden. Die speziellen Einspringmarken sind im Anhang B beschrieben.

## **UMSPEICHERN VON PROGRAMMEN AUS MODULEN**

Wünschen Sie eine schrittweise Kontrolle bei der Programmausführung (TRACE), Modifikationen oder die Aufzeichnung auf Magnetkarten von Programmen dieses Anwender-Moduls, so muß das Programm zunächst in den Speicher des HP-41C kopiert werden. Erläuterungen zu der HP-41C COPY-Funktion finden sich im Bedienungshandbuch. Für die Ausführung eines Programms ist es nicht notwendig, dieses Programm zu kopieren.

## **UNTERBRECHUNG DES PROGRAMMLAUFES**

Alle Programme wurden so ausgelegt, daß sie richtig arbeiten, wenn sie von Anfang bis Ende durchlaufen, ohne den Rechner abzuschalten. (Beachten Sie dabei bitte, daß sich der Rechner auch selbst abschalten kann.) Wird der HP-41C abgeschaltet, kann es notwendig sein, daß für eine richtige Wiederaufnahme der Programmausführung das Flag 21 (SF21) gesetzt werden muß.

## **MARKEN**

Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Verwendung von ALPHA-Marken in einem selbstgeschriebenen Programm dann zu Problemen führen kann, wenn diese Marken identisch mit den Marken im Programm aus dem Anwender-Modul sind.

## MATRIXALGEBRA

Dieses Programm berechnet Determinante und Inverse für Matrizen mit einer Dimension von maximal  $14 \times 14$ , wobei die Lösungen für Gleichungssysteme mit bis zu 14 Unbekannten bestimmt werden.

Es wird das GAUSSsche Eliminationsverfahren mit modifiziertem Pivot-Verfahren verwendet. Aus Platzgründen kann das Verfahren nicht vollständig dargestellt werden, aber in der einschlägigen Literatur (vgl. Literaturangaben) kann die fehlende Information eingeholt werden.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren besteht aus einer Folge von Zeilenoperationen zweier Typen: Die expandierende Elimination und die Lösung. Während der Eliminationsphase wird die  $N \times N$  Matrix  $A$  in eine obere Dreiecksmatrix  $U$  umgewandelt, wobei  $A$  als nichtsinguläre Matrix angenommen wird. Die Multiplikatoren, aus denen diese Matrix erstellt wird, bilden eine untere Dreiecksmatrix  $L$ , welche 1.0 in der Diagonale enthält. Wenn auf das Pivot-Verfahren, das durch eine Folge von Zeilenvertauschungen zu einer Verbesserung der Genauigkeit bei vielen Gleichungssystemen führt, verzichtet wird, gilt für die Matrizen die Beziehung  $U = LA$ . Am Ende dieses Programnteils wird Flag 4 gelöscht, damit ist auch die Matrix  $A$  in ihrer ursprünglichen Form zerstört. Die ursprünglichen Elemente von  $A_{ij}$  sind durch die Elemente von  $U$  ( $i \leq j$ ) und  $L$  ( $i > j$ ) ersetzt. Die Rückschätzung in diesem Programm verwendet die transformierten Matrizen  $U$  und  $L$  für die Determinante und Inverse von  $A$  und zur Lösung des Systems homogener Gleichungen.

Gleichungen: (am Beispiel einer  $5 \times 5$  Matrix)

$$\text{Es sei } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$$

Die Determinante von  $A$ ,  $\text{Det } A$ , ergibt sich nach der Transformation nach  $U$  als Produkt der Diagonalelemente:

$$\text{Det } A = (-1)^k U_{11} U_{22} U_{33} U_{44} U_{55},$$

wobei  $k$  die Anzahl der Zeilen ist, die vertauscht wurden.

Es sei  $C$  die Inverse von  $A$ , d. h. diejenige  $5 \times 5$  Matrix, die  $AC=CA=I$  erfüllt.

Für  $I$  gilt, daß  $I_{ij} = 1$  für  $i=j$  und 0 andernfalls.

$C$  wird spaltenweise in der folgenden Form bestimmt:

Es sei  $c_j$  der  $j$ -te Spaltenvektor von  $C$ , z. B.:



$$c_{.j} = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ c_{3j} \\ c_{4j} \\ c_{5j} \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$c_{.j}$  wird aus der Lösung der Gleichung

$$Ac_{.j} = I_{.j}, \text{ mit } I_{.j} = (1 \text{ für } i=j, 0 \text{ andernfalls})$$

Beispielsweise wird  $c_{.1}$  durch die Lösung von

$$Ac_{.1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bestimmt.

Ein System von 5 Gleichungen für 5 Unbekannte kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 + A_{15}x_5 &= B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 + A_{25}x_5 &= B_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4 + A_{35}x_5 &= B_3 \\ A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4 + A_{45}x_5 &= B_4 \\ A_{51}x_1 + A_{52}x_2 + A_{53}x_3 + A_{54}x_4 + A_{55}x_5 &= B_5 \end{aligned}$$

wobei die  $x_j$  unbekannt und die  $B_i$  Konstante sind.

In Matrixnotation wird diese Gleichung zu  $Ax = B$ , wobei  $X$  und  $B$  Spaltenvektoren sind:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

Das Problem wird mit  $Ux = LB$  gelöst (wobei das Pivotieren vernachlässigt ist).

#### Anmerkung:

Ein Stop während der Programmausführung mit der Anzeige NO SOLUTION bedeutet, daß die Matrix  $A$  singulär ist.

- Das Programm ist für 14x14 Matrizen ausgelegt, allerdings werden ab 7x7 Matrizen Speichererweiterungs-Module benötigt. Konsultieren Sie die Matrix-Register-Karte für den Speicherbedarf verschiedener Matrizen.
- Das Mathematik-Paket muß in eine Buchse nach dem Speichererweiterungs-Modul eingesetzt sein.
- Sind die Elemente von A bereits richtig abgelegt, die Dimensionierung im Register 14 ( $R_{14}$ ) enthalten, Flag 04 gesetzt und die Flags 06–10 gelöscht, dann kann die initialisierende Antwort ausgelassen und das Pivot-Verfahren durch Drücken von **[XEQ]** PVT gestartet werden. Soll ein Gleichungssystem gelöst werden, müssen Spaltenregister belegt und Flag 05 gesetzt sein.
- Wird DET als Unterprogramm aufgerufen, wird der Wert der Determinante ins Y-Register übergeben.
- Bei der Eingabe der Matricelemente darf das Y-Register nicht geändert werden.
- Die besten Ergebnisse werden erzielt, wenn die Matrix die Verfahrensvoraussetzungen erfüllt.

**Literatur:**

Carnahan, Luther and Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley and Sons, 1969.

George E. Forsythe, Michael A. Malcolm, and Cleve B. Moler, *Computer Methods in Mathematical Computation*, Computer Science Department, Stanford University, 1972.

G. Forsythe and C. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, 1967.

C. Moler, "Matrix Computations with Fortran and Paging", Comm. ACM, vol. 15, no. 4, pp. 268-270 (April, 1972).

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		<b>[XEQ]</b> MATRIX	ORDER=?
2.	Spalten/Zeilenzahl (N) eingeben ( $N \leq 14$ )	N	<b>[R/S]</b>	SET SIZE nnn
3.	Umfang eingeben und weiter		<b>[XEQ]</b> SIZE nnn <b>[R/S]</b>	A1,1=?
4.	Matricelemente zeilenweise eingeben ( $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \dots A_{21}, A_{22}, A_{23}, \dots$ usw.)	$A_{11}$ $A_{12}$ . . .	<b>[R/S]</b> <b>[R/S]</b> . . .	A1,2=? A1,3=? . . .

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
5.	Schritt 4 wiederholen bis alle Elemente eingegeben	$A_{NN}$	<input type="button" value="R/S"/>	0.0000
6.	Nach Bedarf: Matrix ausgeben		<input type="button" value="XEQ"/> VMAT <input type="button" value="R/S"/>	A1,1= A1,2= . . AN,N=
7.	Nach Bedarf: Matrix abändern		<input type="button" value="XEQ"/> EDIT	ROW $\uparrow$ COL=?
7.a	Eingabe von Zeile (I) und Spalte (J) des abzuändernden Elementes	I J	<input type="button" value="ENTER"/> <input type="button" value="R/S"/>	AI,J=?
7.b	neuen Wert eingeben	$A_{ij}$	<input type="button" value="R/S"/> * <input type="button" value="R/S"/> *	AI,J= ROW $\uparrow$ COL=?
7.c	Schritte Nr. 7a und 7b wiederholen, wie benötigt.			
7.d	Ende Änderung		<input type="button" value="R/S"/>	0.0000
8.	Determinante berechnen		<input type="button" value="XEQ"/> DET	DET=
9.	Inverse bestimmen (spaltenweise)		<input type="button" value="XEQ"/> INV <input type="button" value="R/S"/>	C1,1= C2,1= : . CN,N=
10.	Für die Lösung simultaner Gleichungen, Spaltenvektor B eingeben	$B_1$ : . $B_N$	<input type="button" value="XEQ"/> SIMEQ <input type="button" value="R/S"/> : . <input type="button" value="R/S"/>	B1=? B2=? : . 0.0000
11.	Gleichungssystem lösen		<input type="button" value="R/S"/> : . <input type="button" value="R/S"/>	X1= : . XN=
12.	Nach Bedarf: Ausgabe der Spalte		<input type="button" value="XEQ"/> VCOL <input type="button" value="R/S"/> : . <input type="button" value="R/S"/>	B1= B2= : . BN=

\*Ein zusätzliches Drücken von  wird benötigt, wenn kein Drucker angeschlossen ist.



14 Matrixalgebra

Beispiel 1:

Gesucht sind Determinante und Inverse der folgenden Matrix:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Tasten:

XEQ ALPHA MATRIX ALPHA  
5 R/S

Anzeige:

ORDER=?  
SET SIZE 50 (bedeutet, daß weniger als  
50 Register  
aktuell verfügbar sind)

XEQ ALPHA SIZE ALPHA 050  
R/S

A1, 1=?

6 R/S 3 R/S 2 CHS R/S 2 R/S  
3 R/S 1 R/S 4 R/S 3 CHS R/S  
4 R/S 2 R/S 2 R/S 3 R/S  
1 CHS R/S 2 CHS R/S 9 R/S  
4 R/S 3 R/S 0 R/S 2 R/S 1 R/S  
3 R/S 5 R/S 6 CHS R/S  
6 R/S 2 R/S

0.0000  
DET=-200.0000 (Det A)

XEQ ALPHA DET ALPHA  
XEQ ALPHA INV ALPHA

C1, 1=0.2000

R/S

C2, 1=-1.7500

R/S

C3, 1=0.7000

R/S

C4, 1=1.7250

R/S

C5, 1=1.0000

R/S

C1, 2=-0.1200

R/S

C2, 2=-2.0000

R/S

C3, 2=1.2800

R/S

C4, 2=2.5400

R/S

C5, 2=1.4000

R/S

C1, 3=-0.0400

R/S

C2, 3=0.5000

R/S

C3, 3=-0.2400

R/S

C4, 3=-0.5700

R/S

C5, 3=-0.2000

R/S

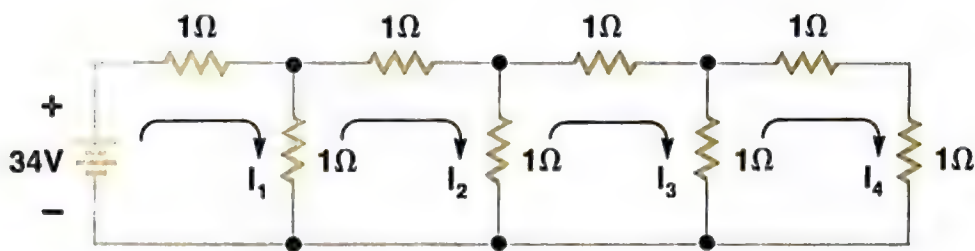
Tasten:

R/S  
 R/S  
 R/S  
 R/S  
 R/S  
 R/S  
 R/S  
 R/S  
 R/S

Anzeige:

C1, 4=-6.0000 E-10  
 C2, 4=1.7500  
 C3, 4=-0.5000  
 C4, 4=-1.6250  
 C5, 4=-1.0000  
 C1, 5=-1.0000 E-10  
 C2, 5=1.5000  
 C3, 5=-1.0000  
 C4, 5=-1.7500  
 C5, 5=-1.0000

Unter Anwendung der Schleifentechnik auf den untenstehenden Schaltkreis sind die Ströme  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  und  $I_4$  zu bestimmen.



Die zu lösenden Gleichungen lauten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 2I_1 & -I_2 & & & = & 34 \\
 -I_1 & +3I_2 & -I_3 & & = & 0 \\
 & -I_2 & +3I_3 & -I_4 & = & 0 \\
 & & -I_3 & +3I_4 & = & 0
 \end{array}$$

In Matrixnotation:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tasten:

XEQ ALPHA MATRIX ALPHA  
4 R/S

2 R/S 1 CHS R/S 0 R/S 0 R/S  
1 CHS R/S 3 R/S 1 CHS R/S  
0 R/S 0 R/S 1 CHS R/S 3 R/S  
1 CHS R/S 0 R/S 0 R/S  
1 CHS R/S 3 R/S

XEQ ALPHA SIMEQ ALPHA  
34 R/S 0 R/S 0 R/S 0 R/S

R/S

R/S

R/S

R/S

Anzeige:

ORDER=?  
A1,1=?

(es wird weiterhin ein  
Umfang von 050  
angenommen.)

0.0000  
B1=?  
0.0000  
X1=21.0000  
X2=8.0000  
X3=3.0000  
X4=1.0000



## LÖSUNGEN FÜR $f(x)=0$ IN EINEM INTERVALL

Dieses Programm verwendet einen modifizierten Sekanten-Algorithmus, um reelle Lösungen der Gleichung  $f(x)=0$  zu bestimmen. Der Anwender muß die Funktion eingeben und kann zwei Startwerte ( $x_1$  und  $x_2$ ) angeben, die nahe an der gewünschten Lösung liegen sollen. Wird das Intervall anfangs nicht definiert, so wird ein Anfangsintervall zwischen 1 und 10 angenommen.

Gilt  $f(x_1) \cdot f(x_2) \leq 0$  und ist die Funktion im Intervall stetig, so wird immer eine Lösung gefunden. Gilt dagegen  $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$ , kann die Suche nach einer Lösung erfolglos sein. Existiert mehr als eine Lösung im betrachteten Intervall, so wird eine Lösung bestimmt und der Benutzer kann ein kleineres Intervall definieren und das Programm wiederholen.

Die Funktion  $f(x)$  kann unter jeder beliebigen **globalen** Marke – mit höchstens 6 Zeichen Länge – eingegeben werden, es wird jeweils  $x$  zu Anfang im X-Register erwartet. Es können mehrere Funktionen in den Programmspeicher geladen werden, da der Name der zu bestimmenden Funktion vom Programm erfragt wird. Das Programm belegt die Register 00-06. Die restlichen Register und der Stack sind für die Definition von  $f(x)$  frei.

Umfang: 007				
Nummer	Anweisung	eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Funktionseingabe vorbereiten		<b>GTO</b> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	
2.	<b>PRGM</b> -Mode einstellen, Funktion unter dem gewünschten Label ablegen; <b>RTN</b> hinzufügen und <b>PRGM</b> -Mode ausschalten.		<b>PRGM</b> <b>LBL</b> . . . <b>RTN</b> <b>PRGM</b> <b>XEQ</b> <b>SOLVE</b>	
3.	Prögramm initialisieren			FUNCTION NAME?
4.	Funktionsnamen eingeben, (ALPHA-Modus ist in Schritt 3 gesetzt)	Name	<b>R/S</b>	GUESS 1=?
5.	Falls zwei Anfangsschätzungen eingegeben werden sollen, ersten Wert eingeben, ansonsten weiter mit Schritt 7	x <sub>1</sub>	<b>R/S</b>	GUESS 2=?
6.	zweite Anfangsschätzung eingeben	x <sub>2</sub>	<b>R/S</b>	(vgl. Anm.)
7.	Programm ausführen		<b>R/S</b>	(vgl. Anm.)
8.	um eine andere Lösung zu bestimmen ist <b>R/S</b> zu drücken. Für weitere Berechnungen weiter mit Schritt 1 oder 3. <b>Anm.:</b> Es gibt drei Arten der normalen Beendigung des Programmes. Es erscheinen dabei die folgenden Meldungen: 1) keine Lösung gefunden 2) Lösung ist <Wert> 3) Lösung liegt zwischen <Wert 1> und <Wert 2>			
9.	Bei Verwendung als Subroutine (sofern die Anfangsschätzungen bereits eingegeben), können die Schritte 3-9 durch Drücken von <b>XEQ</b> <b>SOL</b> übersprungen werden.			

**Beispiel 1:**

Gesucht sind die Lösungen für  $\ln x + 3x - 10.8074 = 0$ .  $f(x)$  ist durch  $\boxed{\text{LBL}} \text{ FF}$  definiert.

**Tasten:**

$\boxed{\text{XEQ}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ SIZE } \boxed{\text{ALPHA}} 007$   
 $\boxed{\text{GTO}} \boxed{\bullet} \boxed{\bullet}$   
 $\boxed{\text{PRGM}}$   
 $\boxed{\text{LBL}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ FF } \boxed{\text{ALPHA}}$   
 $\boxed{\text{LN}}$   
 $\boxed{\text{LASTX}}$   
 $3 \boxed{\times} \boxed{+}$   
 $10.8074 \boxed{-}$   
 $\boxed{\text{RTN}}$   
 $\boxed{\text{PRGM}}$   
 $\boxed{\text{XEQ}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ SOLVE } \boxed{\text{ALPHA}}$   
 $\text{FF } \boxed{\text{R/S}}$   
 $\boxed{\text{R/S}}$

**Anzeige:**

**FUNCTION NAME?**  
**GUESS 1 =?**  
**ROOT IS 3.2134**

Es ist derjenige Winkel  $\alpha$  zwischen 100 und 101 Rad gesucht, für den  $\sin \alpha = 0.01$  ist. Somit ist  $f(x) = \sin x - 0.01$ . Verwenden Sie dabei  $\boxed{\text{LBL}} \text{ ANGLE}$ .

**Tasten:**

$\boxed{\text{GTO}} \boxed{\bullet} \boxed{\bullet}$   
 $\boxed{\text{PRGM}}$   
 $\boxed{\text{LBL}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ ANGLE } \boxed{\text{ALPHA}}$   
 $\boxed{\text{XEQ}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ RAD } \boxed{\text{ALPHA}}$   
 $\boxed{\text{SIN}}$   
 $.01 \boxed{-}$   
 $\boxed{\text{XEQ}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ DEG } \boxed{\text{ALPHA}}$   
 $\boxed{\text{RTN}}$   
 $\boxed{\text{PRGM}}$   
 $\boxed{\text{XEQ}} \boxed{\text{ALPHA}} \text{ SOLVE } \boxed{\text{ALPHA}}$   
 $\text{ANGLE } \boxed{\text{R/S}}$   
 $100 \boxed{\text{R/S}}$   
 $101 \boxed{\text{R/S}}$   
 $\boxed{\text{R/S}}$

**Anzeige:**

**FUNCTION NAME?**  
**GUESS 1 =?**  
**GUESS 2 =?**  
**ROOT IS BETWEEN 100.5410**  
**AND 100.5410**

Sollen mehr signifikante Ziffern angezeigt werden, drücken Sie  $\boxed{\text{FIX}} 9$  und  $\boxed{\text{x}\overline{\text{z}}\text{y}}$ .



## 20 Lösungen für $f(x)$ in einem Intervall

### Beispiel 3:

Gesucht sind die Lösungen von  $x^2 + 1 = 0$  unter Verwendung von **LBL** CC:

**Tasten:**

**GTO** **•** **•**

**PRGM**

**LBL** **ALPHA** CC **ALPHA**

**x<sup>2</sup>** **1** **+**

**RTN**

**PRGM**

**XEQ** **ALPHA** **SOLVE** **ALPHA**

CC **R/S**

**R/S**

**Anzeige:**

**FUNCTION NAME?**

**GUESS 1 =?**

**NO ROOT FOUND**

## NULLSTELLEN UND FUNKTIONSWERTE VON POLYNOMEN

Dieses Programm kann zur Bestimmung von reellen Nullstellen bei Polynomen höchstens fünften Grades verwendet werden, wenn der Koeffizient des Terms mit höchstem Grade 1 ist. Die Gleichung lautet demnach:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, \quad n = 2, 3, 4 \text{ or } 5.$$

Ist der führende Koeffizient ungleich 1, so muß – durch Division der gesamten Gleichung mit diesem Koeffizienten – dieser zu 1 gemacht werden.

Beim Initialisieren des Programms ist der Polynomgrad (n) vom Benutzer anzugeben. Der Rechner erfragt dann die Koeffizienten  $a_n, \dots, a_1, a_0$ . Sind die Koeffizienten gleich Null, so ist dies anzugeben. Die Koeffizienten sind in den Registern 00-04 gespeichert.

### Gleichungen:

Die Routinen für Gleichungen vierten und fünften Grades verwenden ein Iterationsverfahren, um eine reelle Lösung der Gleichung zu finden. Für diesen Fall darf  $a_0$  nur ungleich 0 sein. (Ist  $a_0 = 0$ , dann ist Null eine reelle Lösung und damit kann der Grad des Polynoms durch Abdivision von  $x$  um 1 reduziert werden.) Sobald eine Nullstelle gefunden ist, wird die Gleichung durch synthetische Division auf eine Gleichung zweiten oder vierten Grades reduziert.

Zur Lösung der Gleichung vierten Grades muß zuerst die kubische Gleichung

$$y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

gelöst werden, wobei

$$b_2 = -a_2$$

$$b_1 = a_3a_1 - 4a_0$$

$$b_0 = a_0(4a_2 - a_3^2) - a_1^2 \text{ ist.}$$

Es sei  $y_0$  die größte Lösung der obigen Gleichung dritten Grades.

Damit kann die Gleichung vierten Grades in zwei quadratische Gleichungen zerlegt werden:

$$x^2 + (A + C)x + (B + D) = 0$$

$$x^2 + (A - C)x + (B - D) = 0$$

wobei  $A = \frac{a_3}{2}, B = \frac{y_0}{2}, D = \sqrt{B^2 - a_0}, C = \sqrt{A^2 - a_2 + y_0}$

ist.

Lösungen für die Gleichung vierten Grades ergeben sich aus der Lösung der beiden quadratischen Gleichungen.

Eine quadratische Gleichung  $x^2 + a_1x + a_0 = 0$  wird nach der Formel

$$-\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}.$$
 gelöst. Ist  $D = \frac{a_1^2}{4} - a_0 > 0$ , sind die Lösungen reell; ist  $D < 0$ , sind die Lösungen komplex nach:  $u \pm iv = -\frac{a_1}{2} \pm i \sqrt{-D}.$

Eine reelle Lösung wird als einzelne Zahl ausgegeben. Komplexe Nullstellen erscheinen immer als Paare der Form  $u \pm iv$  und sind in der Ausgabe bezeichnet.

Anmerkung:

- Lange Programmlaufzeiten sind für Gleichungen 3.-, 4.- oder 5-ten Grades zu erwarten, da diese ein- oder mehrfach eine Iteration durchlaufen.
- Das Programm belegt die Register 00-22

Umfang: 023				
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		<input type="button" value="XEQ"/> POLY	DEGREE=?
2.	Grad des Polynoms eingeben (n=2, 3, 4, 5)	n	<input type="button" value="R/S"/>	a(n-1)=?
3.	Koeffizienten $a_{n-1}$ eingeben Koeffizienten= 0 müssen als 0 eingegeben werden. Schritt wiederholen, bis $a_0$ in der Anzeige erfragt wird.	$a_{n-1}$ . . .	<input type="button" value="R/S"/>	a(n-2)=?
	Koeffizienten $a_0$ eingeben	$a_1$	<input type="button" value="R/S"/>	a0=?
4.		$a_0$	<input type="button" value="R/S"/>	ROOTS?
5.	Für Lösungen ist <input type="button" value="R/S"/> zu drücken, es werden dann alle Lösungen richtig bezeichnet. Weiter mit Schritt 9		<input type="button" value="R/S"/> <input type="button" value="R/S"/> <input type="button" value="R/S"/> <input type="button" value="R/S"/> <input type="button" value="R/S"/>	ROOT= U= V= U= -V=
6.	für den Funktionswert ist mit Nein (N) zu antworten	N	<input type="button" value="R/S"/>	X=?
7.	x eingeben, f(x) wird angezeigt	x	<input type="button" value="R/S"/>	F<X>=
8.	für ein neues x; x eingeben und <input type="button" value="R/S"/> drücken	x	<input type="button" value="R/S"/>	F<X>=
9.	für ein neues Polynom gleichen Grades weiter mit Schritt 1 oder ändern der entsprechenden Koeffizienten in den Registern 00-04 und <input type="button" value="XEQ"/> ROOTS			



**Beispiel 1:**

Gesucht sind die Nullstellen von  $x^5 - x^4 - 101x^3 + 101x^2 + 100x - 100 = 0$

**Tasten:**

[XEQ] [ALPHA] SIZE [ALPHA] 023  
 [XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA]  
 5 [R/S]  
 1 [CHS] [R/S]  
 101 [CHS] [R/S]  
 101 [R/S]  
 100 [R/S]  
 100 [CHS] [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]

**Anzeige:**

**DEGREE=?**  
**a4=?**  
**a3=?**  
**a2=?**  
**a1=?**  
**a0=?**  
**ROOTS?**  
**ROOT=10.0000** (Lösung 1)  
**ROOT=1.0000** (Lösung 2)  
**ROOT=1.0000** (Lösung 3)  
**ROOT=-1.0000** (Lösung 4)  
**ROOT=-10.0000** (Lösung 5)

**Beispiel 2:**

Es ist  $4x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x + 22 = 0$  zu lösen. Die Gleichung muß zu  $x^4 - 2x^3 - \frac{13}{4}x^2 - \frac{10}{4}x + \frac{22}{4} = 0$  umgeformt werden.

**Tasten:**

[XEQ] [ALPHA] POLY [ALPHA]  
 4 [R/S]  
 2 [CHS] [R/S]  
 13 [ENTER+] 4 [+] [CHS] [R/S]  
 10 [ENTER+] 4 [+] [CHS] [R/S]  
 22 [ENTER+] 4 [+] [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]

**Anzeige:**

**DEGREE=?**  
**a3=?**  
**a2=?**  
**a1=?**  
**a0=?**  
**ROOTS?**  
**U=-1.0000** (Die Lösungen 1 und 2  
**V=1.0000** sind  $-1.00 \pm 1.00 i$ )  
**U=-1.0000**  
**-V=-1.0000**  
**ROOT=3.1180** (Lösung 3)  
**ROOT=0.8820** (Lösung 4)

## 24 Nullstellen und Funktionswerte von Polynomen

### Beispiel 3:

Wie verändern sich die Lösungen, wenn der Koeffizient von  $x^2$  von  $-13/4$  in  $-5$  geändert wird?

Tasten:

5 **[CHS]** **[STO]** 02  
**[XEQ]** **[ALPHA]** ROOTS **[ALPHA]**  
**[R/S]**  
**[R/S]**  
**[R/S]**  
**[R/S]**  
**[R/S]**

Anzeige:

**U=-1.1386** (Lösungen 1 und 2 sind  
**V=0.8555**  $-1.1386 \pm .8555 i$ )  
**U=-1.1386**  
**-V=-0.8555**  
**ROOT=3.5031** (Lösung 3)  
**ROOT=0.7741** (Lösung 4)

### Beispiel 4:

Es sind die Funktionswerte des Polynoms

$f(x) = x^5 + 5x^4 - 3x^2 - 7x + 11$  an den Stellen  $x=2.5$  und  $x=-5.0$  zu bestimmen.

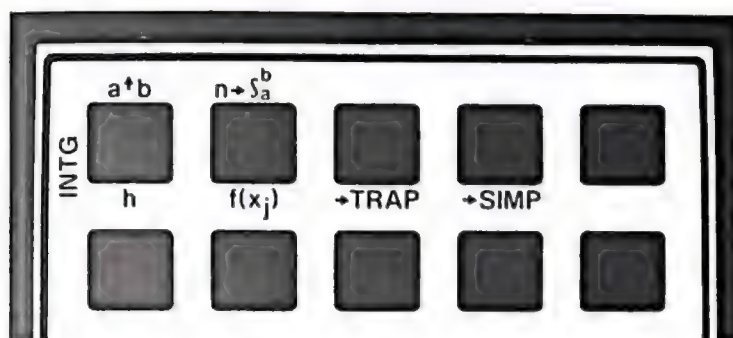
Tasten:

**[XEQ]** **[ALPHA]** POLY **[ALPHA]**  
5 **[R/S]**  
5 **[R/S]**  
0 **[R/S]**  
3 **[CHS]** **[R/S]**  
7 **[CHS]** **[R/S]**  
11 **[R/S]**  
N **[R/S]**  
2.5 **[R/S]**  
5 **[CHS]** **[R/S]**

Anzeige:

**DEGREE=?**  
**a4=?**  
**a3=?**  
**a2=?**  
**a1=?**  
**a0=?**  
**ROOTS?**  
**X=?**  
**F<X>=267.7188**  
**F<X>=-29.0000**

## NUMERISCHE INTEGRATION



Dieses Programm leistet numerische Integration für den Fall, daß eine Funktion explizit oder nur an einer endlichen Zahl abstandsgleicher Stützstellen (diskreter Fall) definiert ist. Die Integrale expliziter Funktion werden nach der SIMPSONschen Regel bestimmt; für diskrete Fälle wird entweder nach der Trapezregel angenähert oder auch die SIMPSONsche Regel angewendet.

### Diskreter Fall

Es seien  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  abstandsgleiche Punkte (mit  $x_j = x_0 + jh, j=1, 2, \dots, n$ ), denen die bekannten Funktionswerte  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  zugehören. Die Funktion  $f(x)$  selbst muß nicht bekannt sein. Nach der Eingabe der Schrittweite  $h$  und der Funktionswerte  $f(x_j), j=0, 1, 2, \dots, n$  wird das Integral

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

entweder nach der Trapezregel angenähert:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \simeq \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right]$$

oder nach SIMPSON geschätzt:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \simeq \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Um die SIMPSONsche Regel anwenden zu können, muß  $n$  gerade sein. Ist  $n$  ungerade, stoppt der Rechner mit der Anzeige **N NOT EVEN**, sobald  $\boxed{D}$  gedrückt wird.



Explizite Funktionen

Ist die Gestalt der Funktion  $f(x)$  bekannt, so kann die Funktion im Programmspeicher abgelegt und nach SIMPSON numerisch integriert werden. Der Benutzer muß die Intervallgrenzen  $a$  und  $b$ , sowie die Zahl der Teilintervalle  $n$ , in die  $(a,b)$  zerlegt wird, angeben. Dieses  $n$  muß gerade sein, andernfalls wird **N NOT EVEN** angezeigt. Das Programm wird fortgesetzt mit

$x_0 = a, x_j = x_0 + jh, j = 1, 2, \dots, n - 1, \text{ und } x_n = b, \text{ wobei}$

$$h = \frac{b - a}{n} \text{ ist.}$$

Das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  wird nach der obigen SIMPSONschen Regel angenähert.

Die Funktion  $f(x)$  kann unter Verwendung einer beliebigen, maximal 6 Zeichen langen, **globalen** Marke in den Programmspeicher eingegeben werden, wobei  $x$  im X-Register erwartet wird. Es können mehrere Funktionen in den Programmspeicher eingegeben werden, da der Funktionsname vom Programm vorher erfragt wird. Das Programm belegt die Register 00-07; die übrigen Register stehen für die Definition von  $f_i(x)$  zur Verfügung.

				Umfang: 008
Nummer	Anweisungen	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Maske auf Rechner legen			
2.	für explizite Funktionen weiter mit Schritt 9, für den diskreten Fall weiter mit Schritt 3			
	DISKRETER FALL			
3.	Programm initialisieren		<input type="checkbox"/> EQ <input type="checkbox"/> INTG	0.0000
4.	Abstand zwischen den x-Werten eingeben	h	<input type="checkbox"/> A	h
5.	Funktionswerte für $x_j$ eingeben Schritt für $j=0,1, \dots n$ wiederholen	$f(x_j)$	<input type="checkbox"/> B	j
6.	Fläche nach Trapezregel bestimmen		<input type="checkbox"/> C	TRAP $\int$
7.	Fläche nach SIMPSON bestimmen (n gerade)		<input type="checkbox"/> D	SIMP $\int$
8.	für weitere Berechnungen weiter mit Schritt 2			
	EXPLIZITE FUNKTIONEN			
9.	Funktionseingabe vorbereiten		<input type="checkbox"/> GTO <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
10.	In <b>PRGM</b> -Modus schalten; Funktion unter gewünschter Marke eingeben; nach <b>RTN</b> wieder PRGM-Modus ausschalten.		<b>PRGM</b> <b>LBL</b> _ : <b>RTN</b> <b>PRGM</b>	
11.	Programm initialisieren		<b>XEQ</b> INTG	
12.	Intervallgrenzen a und b eingeben	a b	<b>ENTER</b> ↑ [A]	a
13.	Anzahl der Teilintervalle n eingeben (n gerade) und Fläche nach SIMPSON berechnen.	n	[B]	FUNCTION NAME?
14.	Funktionsnamen eingeben	Name;	<b>R/S</b>	$\int_a^b f_i(x)dx$
15.	sollen a, b oder n geändert werden, mit entsprechenden Schritt fortsetzen; für weitere Berechnungen nach Schritt 2 gehen.			

Beispiel:

Gegeben seien die untenstehenden acht Werte für  $f(x_j)$ ,  $j= 0,1,2,...,8$ ; gesucht sind die Näherungen des Integrals

$$\int_0^2 f(x) \, dx$$

nach Trapez- und SIMPSONscher Regel. Der Wert für h ist 0.25.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	0	.25	.5	.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x_i)$	2	2.8	3.8	5.2	7	9.2	12.1	15.6	20

Tasten:

**XEQ** **ALPHA** SIZE **ALPHA** 008  
**XEQ** **ALPHA** INTG **ALPHA**

Anzeige:

0.0000

Tasten:	Anzeige:	
.25 <b>A</b> 2 <b>B</b>		
2.8 <b>B</b> 3.8 <b>B</b>		
5.2 <b>B</b> 7 <b>B</b>		
9.2 <b>B</b> 12.1 <b>B</b>		
15.6 <b>B</b> 20 <b>B</b>		
<b>C</b>	16.6750	(Trapezoidal)
<b>D</b>	16.5833	(Simpson's)

Beispiel 2:

Gesucht ist der Funktionswert von

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - \cos x + 0.25}$$

für n=10 und n=30. Man beachte, daß x in Rad erwartet wird. Es ist eine gute Gewohnheit, am Anfang der Routine den Winkelmodus auf Rad und am Ende der Routine wieder auf Grad zu schalten, wenn hauptsächlich in Grad gearbeitet wird. Die Funktion soll unter **LBL** FF eingegeben werden.

Tasten:	Anzeige:	
<b>GTO</b> <b>•</b> <b>•</b>		
<b>PRGM</b>		
<b>LBL</b> <b>ALPHA</b> <b>FF</b> <b>ALPHA</b>		
<b>XEQ</b> <b>ALPHA</b> <b>RAD</b> <b>ALPHA</b>		
<b>COS</b>		
1 <b>X↔Y</b> <b>-</b>		
.25 <b>+</b> <b>1/X</b>		
<b>XEQ</b> <b>ALPHA</b> <b>DEG</b> <b>ALPHA</b>		
<b>RTN</b>		
<b>PRGM</b>		
<b>XEQ</b> <b>ALPHA</b> <b>INTG</b> <b>ALPHA</b>		
0 <b>ENTER</b> 2 <b>π</b> <b>x</b> <b>■</b> <b>A</b>		
10 <b>■</b> <b>B</b>	FUNCTION NAME?	
<b>FF</b> <b>R/S</b>	8.2193	(n=10)
30 <b>■</b> <b>B</b>	FUNCTION NAME?	
<b>FF</b> <b>R/S</b>	8.3774	(n=30)

Die exakte Lösung ist  $\frac{8\pi}{3} = 8.3776$



## DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Dieses Programm berechnet Ableitungen ersten und zweiten Grades nach der Methode von RUNGE-KUTTA. Eine Ableitung ersten Grades ist von der Form  $y'=f(x,y)$ , mit den Anfangswerten  $x_0, y_0$  und  $y_0'$ .

In jedem Fall kann die Funktion  $f(x)$  in den Programmspeicher unter einer beliebigen, maximal 6 Zeichen langen, **globalen** Marke eingegeben werden. Die Werte  $x$  und  $y$  werden im X- bzw. Y-Register erwartet;  $y'$  wird im Z-Register bei Ableitungen zweiten Grades erwartet. Das Modul-Programm belegt die Register 00-07. Die verbleibenden Register stehen für die Definition der Funktion zur Verfügung.

Die Lösung ist ein numerischer Wert, bei dem  $y_i$  für  $x_i = x_0 + ih$  ( $i=1,2,\dots$ ) für ein vom Benutzer zu bestimmendes Inkrement berechnet wird. Der Wert für  $h$  kann zu jeder Zeit während der Programmausführung geändert werden, man speichert dazu  $h/2$  in das Register 01. Dies erlaubt Lösungen der Gleichung beliebig nahe an einem ihrer Pole ( $y \rightarrow \pm \infty$ ).

### Gleichungen:

Erste Ableitung:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)$$

wobei

$$c_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$c_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_1}{2}\right)$$

$$c_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_2}{2}\right)$$

$$c_4 = hf(x_i + h, y_i + c_3)$$

Zweite Ableitung:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ y_i' + \frac{1}{6} (k_1 + k_2 + k_3) \right]$$

$$y_{i+1}' = y_i' + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_1, y_1, y_1')$$
$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} y_1' + \frac{h}{8} k_1, y_1' + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} y_1' + \frac{h}{8} k_1, y_1' + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_1 + h, y_1 + hy_1' + \frac{h}{2} k_3, y_1' + k_3\right)$$

Anmerkung:

- Werden die Werte für eine zweite Ableitung eingegeben, so müssen die Werte von  $x_0$  und  $y_0$  vor dem Wert für  $y_0$  eingegeben werden. Alle Werte müssen eingegeben werden, auch wenn sie gleich Null sind.

Umfang: 008				
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Funktionseingabe vorbereiten f(x,y,y')		<div>GTO</div> <div>•</div> <div>•</div>	
2.	PRGM-Modus einschalten, Funktion unter der gewünschten Marke eingeben; nach <div>RTN</div> den PRGM-Modus ausschalten.		<div>PRGM</div> <div>LBL</div> <div>.</div> <div>.</div> <div>RTN</div> <div>PRGM</div>	
3.	Programm initialisieren		<div>XEQ</div> <div>DIF EQ</div>	FUNCTION NAME?
4.	Namen der Funktion eingeben	Name	<div>R/S</div>	ORDER=?
5.	Eingabe ob 1. oder 2. Ableitung (1 oder 2)	1 oder 2	<div>R/S</div>	STEP SIZE=?
6.	Schrittweite h eingeben	h	<div>R/S</div>	X0=?
7.	Anfangswert für x eingeben	x0	<div>R/S</div>	Y0=?
8.	Anfangswert für y eingeben	y0	<div>R/S</div>	x1 or Y0.=?
9.	für eine zweite Ableitung (Abl. 2. Ordnung) Anfangswert für y' eingeben.	y0	<div>R/S</div>	x1
10.	Ausgabe der Werte für x und y nacheinander		<div>R/S</div> <div>R/S</div> <div>R/S</div> <div>R/S</div>	y1 x2 y2 etc.

**Beispiel 1:**

Unter Verwendung von **LBL** FX, soll die Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \frac{\sin x + \tan^{-1}(y/x)}{y - \ln(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

numerisch bestimmt werden, wobei  $x_0=y_0=1$ . Der Winkelmodus muß auf RAD gesetzt werden. Außerdem werden drei weitere Speicherregister für die Definition der Funktion benötigt.

**Tasten:**

**XEQ** **ALPHA** SIZE **ALPHA** 011  
**GTO** **•** **•**  
**PRGM**  
**LBL** **ALPHA** FX **ALPHA**  
**XEQ** **ALPHA** RAD **ALPHA**  
**STO** 08  
**x<sub>2</sub>y**  
**STO** 09  
**x<sub>2</sub>y**  
**R-P**  
**LN**  
**STO** 10  
**R↓**  
**RCL** 08  
**SIN**  
**+**  
**RCL** 09  
**RCL** 10  
**-**  
**÷**  
**XEQ** **ALPHA** DEG **ALPHA**  
**RTN**  
**PRGM**  
**XEQ** **ALPHA** DIFEQ **ALPHA**  
FX **R/S**  
1 **R/S**  
.5 **R/S**  
1 **R/S**  
1 **R/S**  
**R/S**  
**R/S**

**Anzeige:****FUNCTION NAME?****ORDER=?****STEP SIZE=?****XO=?****YO=?**1.5000 (x<sub>1</sub>)2.0553 (y<sub>1</sub>)2.0000 (x<sub>2</sub>)

32 Differentialgleichungen

Tasten:

R/S  
R/S  
R/S

Anzeige:

2.7780 (y<sub>2</sub>)  
2.5000 (x<sub>3</sub>)  
3.2781 (y<sub>3</sub>)  
etc.

Beispiel 2:

Unter Verwendung von LBL DIF, soll die Gleichung 2. Ordnung

$$(1 - x^2)y'' + xy' = x$$

gelöst werden, wobei x<sub>0</sub>=y<sub>0</sub>=y'<sub>0</sub>=0 und h = 0.1.

Man formuliert die Gleichung um zu:

$$y'' = \frac{x(1 - y')}{1 - x^2} = \frac{x(y' - 1)}{x^2 - 1} \quad x \neq 1$$

Tasten:

GTO 00  
PRGM  
LBL ALPHA DIF ALPHA  
STO 08  
R↓ R↓  
1 -  
RCL 08  
x  
LASTx  
x<sup>2</sup>  
1 - +  
RTN  
PRGM  
XEQ ALPHA DIFEQ ALPHA  
DIF R/S  
2 R/S  
.1 R/S  
0 R/S  
0 R/S  
0 R/S

Anzeige:

FUNCTION NAME?  
ORDER=?  
STEP SIZE=?  
XO=?  
YO=?  
YO.=?  
0.1000 (x<sub>1</sub>)



Tasten:

- R/S
- R/S
- R/S
- R/S
- R/S
- R/S
- R/S

Anzeige:

- 0.0002 (y<sub>1</sub>)
- 0.2000 (x<sub>2</sub>)
- 0.0013 (y<sub>2</sub>)
- 0.3000 (x<sub>3</sub>)
- 0.0046 (y<sub>3</sub>)
- 0.4000 (x<sub>4</sub>)
- 0.0109 (y<sub>4</sub>)
- etc.

## FOURIER-ANALYSE

Jede periodische Funktion kann – unter Verwendung der nachfolgenden Formeln – als Folge von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi tk}{T} + b_k \sin \frac{2\pi tk}{T} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \left( \frac{2\pi tk}{T} - \theta_k \right)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi tk}{T} dt, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi tk}{T} dt, k = 1, 2, \dots$$

$$c_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \left( \frac{b_k}{a_k} \right)$$

$T$  = Periodizität von  $f(t)$

Dieses Programm bestimmt die Fourier-Koeffizienten für diskrete Fälle der obigen Formeln, wenn eine große Zahl von Stichproben der periodischen Funktion gegeben ist. Bis zu zehn aufeinanderfolgende Koeffizientenpaare können auf einmal aus  $N$  abstandsgleichen Punkten berechnet werden. Die Koeffizienten können sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Polarform dargestellt werden.

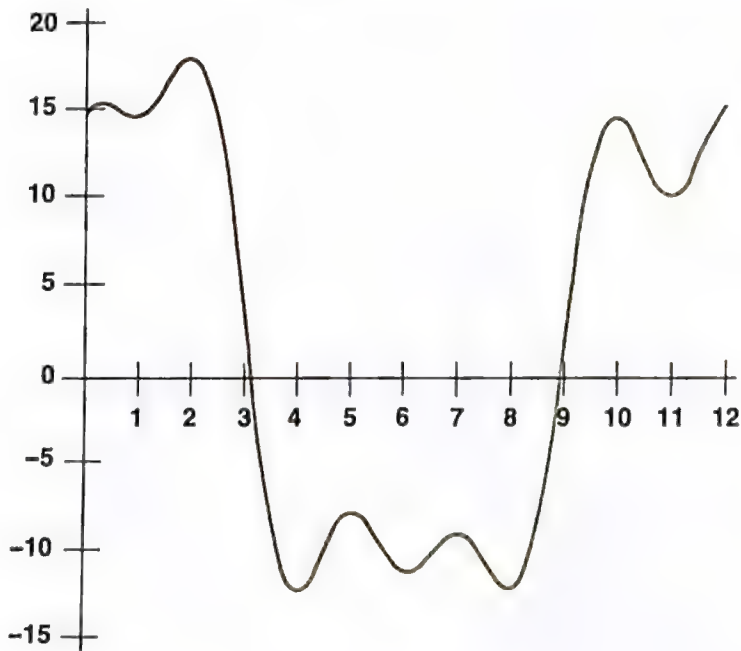
Der Wert für  $N$  sollte so gewählt werden, daß er mindestens doppelt so groß ist wie der höchste erwartete Wert der Grundfunktion, die in der periodischen Funktion vorliegt. Eine zu geringe Schätzung für  $N$  bewirkt, daß eine Hälfte des Stichprobenintervalls mit einer niedrigeren Frequenz überschätzt wird (ein Umstand der als 'aliasing' bekannt ist).

Die Register 00-26 sind vom Programm belegt.

Umfang: 027				
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren		<input type="checkbox"/> XEQ FOUR	NO.SAMPLES=?
2.	Anzahl der Stichproben in einer Periode eingeben	# Stichp.	<input type="checkbox"/> R/S	NO.FREQ=?
3.	Anzahl der gewünschten Frequenzen eingeben	# Frequ.	<input type="checkbox"/> R/S	1ST COEFF=?
4.	Exponent der ersten Funktion (J) eingeben	J	<input type="checkbox"/> R/S	Y1=?...RECT?
5.	y <sub>n</sub> mit n=1, 2, ... , N eingeben	y <sub>n</sub>	<input type="checkbox"/> R/S	Y2=?...RECT?
6.	Schritt 5 wiederholen bis RECT? in der Anzeige			
7.	Ist die Antwort ja, muß <input type="checkbox"/> R/S gedrückt werden, um die Koeffizienten für $J \leq k \leq J + \# \text{Frequ.}$ in kartesischen Koordinaten auszugeben.		<input type="checkbox"/> R/S	a <sub>k</sub>
			<input type="checkbox"/> R/S	b <sub>k</sub>
	Ist die Antwort Nein (N), sollen N die Koeffizienten in Polarkoordinaten ausgegeben werden.	N	<input type="checkbox"/> R/S	c <sub>k</sub> =
			<input type="checkbox"/> R/S	ϕ <sub>k</sub> =
	durch drücken von <input type="checkbox"/> R/S werden aufeinanderfolgende Koeffizienten angezeigt.			
8.	um den Wert der Fourierreihe zum Zeitpunkt t zu bestimmen, ist der USER-Modus zu setzen und t einzugeben.	t	<input type="checkbox"/> USER <input type="checkbox"/> E	f(t)

Beispiel:

Es ist eine Fourier-Serie für die unten gezeigten Wellenformen zu bestimmen. Da 12 Stichproben vorliegen, werden 7 Frequenzen ausgewählt (DC-Term und 6 harmonische Funktionen). Die Koeffizienten sind als Polarkoordinaten darzustellen.



t	f(t)
1	14.758
2	17.732
3	2
4	-12.
5	- 7.758
6	-11
7	- 9.026
8	-12.
9	2
10	14.268
11	10.026
12	15

Tasten:

XEQ ALPHA SIZE ALPHA 027  
XEQ ALPHA FOUR ALPHA  
12 R/S  
7 R/S  
0 R/S

Anzeige:

NO. SAMPLES=?  
NO. FREQ=?  
1ST COEFF=?  
Y1=?



Tasten:

14.758 **R/S**  
 17.732 **R/S**  
 2 **R/S**  
 12 **CHS** **R/S**  
 7.758 **CHS** **R/S**  
 11 **CHS** **R/S**  
 9.026 **CHS** **R/S**  
 12 **CHS** **R/S**  
 2 **R/S**  
 14.268 **R/S**  
 10.026 **R/S**  
 15 **R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**

Anzeige:

Y2=?  
 Y3=?  
 Y4=?  
 Y5=?  
 Y6=?  
 Y7=?  
 Y8=?  
 Y9=?  
 Y10=?  
 Y11=?  
 Y12=?  
 RECT?  
 a0=4.0000  
 b0=0.0000  
 a1=14.9998  
 b1=1.0000  
 a2=3.0000E-8  
 b2=1.0000  
 a3=-5.0000  
 b3=1.0000  
 a4=3.3333E-9  
 b4=3.2000E-9  
 a5=3.0002  
 b5=1.4673E-5  
 a6=0.0000  
 b6=2.3599E-8

Somit ist  $f(t) = 2 + 15 \cos \frac{2\pi t}{12} + \sin \frac{2\pi t}{12}$

$$+ \sin \frac{4\pi t}{12}$$

$$- 5 \cos \frac{6\pi t}{12} + \sin \frac{6\pi t}{12}$$

$$+ 3 \cos \frac{10\pi t}{12}$$

## KOMPLEXE OPERATIONEN

Dieses Programm gilt für verkettete Operationen mit komplexen Zahlen in kartesischer Form. Neben den vier Grundrechnungsarten für komplexe Zahlen (+, -, x, : ) sind die gebräuchlichsten Funktionen der komplexen Zahlen  $z$  und  $w$  ( $|z|$ ,  $1/z$ ,  $z^n$ ,  $z^{1/n}$ ,  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\tan z$ ,  $a^z$ ,  $\log a^z$ ,  $z^{1/w}$  und  $z^w$ ) enthalten. Funktionen und Operationen können gemischt werden, um Ausdrücke wie  $z_3/(z_1+z_2)$ ,  $e^{z_1 z_2}$ ,  $|z_1 + z_2| + |z_2 - z_3|$  etc., zu berechnen, wobei  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_3$  komplexe Zahlen der Form  $x+iy$  sind.

Für den wiederholten Gebrauch dieser Operationen, kann der Benutzer die einzelnen Programme ausgewählten Tasten zuweisen und eine entsprechende Maske selbst herstellen. Eine vernünftige Neuzuweisung könnte etwa sein:

ASN	SINZ	SIN
ASN	LNZ	LN
ASN	C+	+
ASN	C-	-
ASN	CINV	1/x

Das Logik-System für diese Programme kann man sich am besten als eine Art umgekehrte Polnische Notation mit einem aus zwei komplexen Zahlen bestehenden Stack vorstellen. Das untere und das obere Register des komplexen Stacks sei als  $\xi$  bzw.  $\tau$  bezeichnet. Diese entsprechen somit den X- und T-Registern des Vier-Register Stacks des Rechners\*. Eine komplexe Zahl  $z_1$  wird durch die Tasten  $y_1$  ENTER  $x_1$  ins  $\xi$ -Register transportiert. Durch die Eingabe einer zweiten komplexen Zahl  $z_2$  (ENTER  $y_2$  ENTER  $x_2$ ) wird  $z_1$  ins Register  $\tau$  geschoben und  $z_2$  im Register  $\xi$  abgelegt. Der vorherige Inhalt von  $\tau$  ist verloren.

Funktionen bedienen sich des  $\xi$ -Registers, deren Ergebnis im  $\xi$ -Register steht (mit Ausnahme von  $|z|$ , wobei eine reelle Zahl erscheint). Arithmetische Operationen beziehen sich auf das  $\xi$ - und  $\tau$ -Register; das Ergebnis wird in  $\xi$  abgelegt.

Das Programm des Anwender-Moduls belegt die Speicher 00-04.

### Gleichungen:

Es sei

$$z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}, k = 1, 2$$

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

\* Jedes Register des Stacks muß zwei Zahlen enthalten: den reellen und den imaginären Teil des komplexen Inhalts. Somit werden zwei Stack-Register für eine komplexe Zahl gebraucht. Komplexe Stack-Register werden (sprachlich) wie ein einziges Register behandelt.

Die Lösung sei für jeden Fall von der Form  $u + iv$ .

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$1/z = \frac{x}{r^2} - i \frac{y}{r^2}$$

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i \left( \frac{\theta}{n} + \frac{360k}{n} \right)}, k = 0, 1, \dots, n-1$$

(es werden alle Lösungen ausgegeben,  $k=0, 1, \dots, n-1$ )

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \text{ mit } y \text{ in Rad}$$

$$\ln z = \ln r + i\theta, \text{ mit } z \neq 0$$

$$a^z = e^{z \ln a}, \text{ mit } a > 0 \text{ und reell}$$

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a}, \text{ mit } a > 0 \text{ reell und } z \neq 0$$

$$z^w = e^{w \ln z}, \text{ mit } z \neq 0, w \text{ is komplex}$$

$$z^{1/w} = e^{\ln z / w}, \text{ mit } z \neq 0, \text{ und komplex } w \neq 0$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \text{ Winkel in Rad}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \text{ Winkel in Rad}$$

$$\tan z = \frac{\sin 2x + \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}, \text{ Winkel in Rad}$$

				Umfang: 005
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	ARITHMETIK erste komplexe Zahl eingeben ( $x_1 + iy_1$ )	$y_1$ $x_1$	<b>ENTER</b> ↑ <b>ENTER</b> ↑	
2.	zweite komplexe Zahl eingeben ( $x_2 + iy_2$ )	$y_2$ $x_2$	<b>ENTER</b> ↑	
3.	auswählen einer der vier Operationen: ● Addieren (+)  ● Subtrahieren (-)  ● Multiplizieren (x)  ● Dividieren ( $\div$ )		<b>XEQ</b> C+ <b>R/S</b> <b>XEQ</b> C- <b>R/S</b> <b>XEQ</b> Cx <b>R/S</b> <b>XEQ</b> C÷ <b>R/S</b>	U= V= U= V= U= V= U= V=
4.	das Ergebnis der Operation ist nun im Stack; weiter mit Schritt 5 für Funktionen oder Schritt 2 mit anderen arithmetischen Operationen			
5.	FUNKTIONEN Auswahl einer der folgenden Funktionen: ● Absolutwert ( $ z $ )  ● Reziprokwert ( $1/z$ )  ● ganzzahlige Potenz von $z$ ( $z^n$ )  ● n-te Wurzel von $z$ ( $z^{1/n}$ ) Beachte: es gibt n Lösungen der Form $u+iv$  ● $e^z$  ● natürlicher Logarithmus von $z$ ( $\ln z$ )  ● z-te Potenz einer reellen Zahl $a$ ( $a^z$ )	$y_1$ $x_1$ $y_1$ $x_1$ $y_1$ $x_1$ $n$ $y_1$ $x_1$ $n$ $y_1$ $x_1$ $a$	<b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> MAGZ <b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> CINV <b>R/S</b> <b>ENTER</b> ↑ <b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> Z ^ N <b>R/S</b> <b>ENTER</b> ↑ <b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> Z ^ 1/N <b>R/S</b> <b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> e ^ Z <b>R/S</b> <b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> LN Z <b>R/S</b> <b>ENTER</b> ↑ <b>ENTER</b> ↑ <b>XEQ</b> a ^ Z <b>R/S</b>	R= U= V= U= V= U= V= U= V= U= V=



Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
6.	<ul style="list-style-type: none"><li>● Logarithmus von z zur Basis a (<math>\log_a z</math>)</li><li>● Komplexe Potenz von z <math>w=x_2 + iy_2</math> (<math>z^w</math>)</li><li>● w-te komplexe Wurzel von z (<math>z^{1/w}</math>)</li><li>● <math>\sin(z)</math></li><li>● <math>\cos(z)</math></li><li>● <math>\tan(z)</math></li></ul> weiter mit Schritt 2 für arithmetische oder Schritt 5 für andere Operationen	y <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	U= V=
		x <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	
		a	<b>XEQ LOGZ</b>	
			<b>R/S</b>	
		y <sub>2</sub>	<b>ENTER</b>	U= V=
		x <sub>2</sub>	<b>ENTER</b>	
		y <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	
		x <sub>1</sub>	<b>XEQ Z<math>\uparrow</math>W</b>	U= V=
			<b>R/S</b>	
		y <sub>2</sub>	<b>ENTER</b>	
		x <sub>2</sub>	<b>ENTER</b>	U= V=
		y <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	
		x <sub>1</sub>	<b>XEQ Z<math>\uparrow</math>1/W</b>	
			<b>R/S</b>	
		y <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	U= V=
		x <sub>1</sub>	<b>XEQ SINZ</b>	
			<b>R/S</b>	
		y <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	U= V=
		x <sub>1</sub>	<b>XEQ COSZ</b>	
			<b>R/S</b>	
		y <sub>1</sub>	<b>ENTER</b>	U= V=
		x <sub>1</sub>	<b>XEQ TANZ</b>	
			<b>R/S</b>	

Beispiel 1:

Es soll der Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2 + z_3} ,$$

mit  $z_1=23+13i$ ,  $z_2=-2+i$  und  $z_3=4-3i$  berechnet werden.

(Vorschlag: da nur jeweils zwei Zahlen vom Programm bearbeitet werden können, sollte die Gleichung umformuliert werden zu

$$z_1 \times [1/(z_2 + z_3)].)$$

Tasten:

XEQ ALPHA SIZE ALPHA 005  
1 ENTER 2 CHS ENTER  
3 CHS ENTER 4  
XEQ ALPHA C+ ALPHA  
R/S  
XEQ ALPHA CINV ALPHA  
R/S  
13 ENTER 23  
XEQ ALPHA Cx ALPHA  
R/S

Anzeige:

U=2.0000      real ( $z_2 + z_3$ )  
V=-2.0000      imag ( $z_2 + z_3$ )  
U=0.2500       $1/(z_2 + z_3)$   
V=0.2500  
  
U=2.500      ( $z_1/(z_2 + z_3)$ )  
V=9.0000

Beispiel 2:

Gesucht sind die drei dritten Wurzeln von 8.

Tasten:

0 ENTER 8 ENTER 3  
XEQ ALPHA Z↑1/N ALPHA  
R/S  
R/S  
R/S  
R/S  
R/S

Anzeige:

U=2.0000  
V=0.0000  
U=-1.0000  
V=1.7321  
U=-1.0000  
V=-1.7321

Beispiel 3:

Berechne  $e^{z^{-2}}$ , mit  $z=(1+i)$ :

Tasten:

1 ENTER 1 ENTER 2  
XEQ ALPHA Z↑N ALPHA  
R/S  
XEQ ALPHA CINV ALPHA  
R/S  
XEQ ALPHA e↑Z ALPHA  
R/S

Anzeige:

U=0.0000      ( $z^2$ )  
V=2.0000  
U=0.0000      ( $z^{-2}$ )  
V=-0.5000  
U=0.8776      ( $e^{z^{-2}}$ )  
V=-0.4794

**Beispiel 4:**

Berechne  $\sin(2 + 3i)$ :

Tasten:

3 **ENTER** 2  
**XEQ** **ALPHA** SINZ **ALPHA**  
**R/S**

Anzeige:

**$U=9.1545$**

**$V=-4.1689$**

## HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN

Dieses Programm berechnet die hyperbolischen Funktionen und deren Inverse. Falls die einzelnen Programme bestimmten Tasten des Rechners zugeordnet werden sollen, um sie mit einer entsprechenden Maske zu kennzeichnen, könnte eine Umdefinition von Tasten etwa so aussehen:

ASN	SINH	SIN
ASN	COSH	COS
ASN	TANH	TAN
ASN	ASINH	SIN
ASN	ACOSH	COS
ASN	ATANH	TAN

### Gleichungen:

Hyperbolische Funktionen:

$$\sinh x = \frac{1}{2} \left[ e^x - 1 + \frac{e^x - 1}{e^x} \right]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Inverse hyperbolische Funktionen:

$$\sinh^{-1}x = \ln \left[ x + (x^2 + 1)^{1/2} \right]$$

$$\cosh^{-1}x = \ln \left[ x + (x^2 - 1)^{1/2} \right] \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] \quad x^2 < 1$$

### Bemerkungen:

- Das Programm des Moduls belegt das Register 00.
- Das Drucker-Einschalt-Flag (Flag 21) wird vom Modul-Programm nicht gesetzt.



Umfang: 001				
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Für hyperbolische Funktionen weiter mit Schritt 2; für inverse hyperbolische Funktionen weiter mit Schritt 3. HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN			
2.	Argument eingeben und berechnen ● Sinus hyperbolicus ● Kosinus hyperbolicus ● Tangens hyperbolicus INVERSE HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN	x	<b>XEQ</b> SINH	sinh x
		x	<b>XEQ</b> COSH	cosh x
		x	<b>XEQ</b> TANH	tanh x
3.	Argument eingeben und berechnen ● inverser Sinus hyperbolicus ● inverser Kosinus hyperbol. ● inverser Tangens hyperbol.	x	<b>XEQ</b> ASINH	$\sinh^{-1} x$
		x	<b>XEQ</b> ACOSH	$\cosh^{-1} x$
		x	<b>XEQ</b> ATANH	$\tanh^{-1} x$

Beispiel 1

Berechne die folgenden hyperbolischen Funktionen:

$\sinh 2.5, \cosh 3.2, \tanh 1.9$

Tasten:

Anzeige:

**XEQ** **ALPHA** SIZE **ALPHA** 001

2.5 **XEQ** **ALPHA** SINH **ALPHA**

6.0502 (sinh 2.5)

3.2 **XEQ** **ALPHA** COSH **ALPHA**

12.2866 (cosh 3.2)

1.9 **XEQ** **ALPHA** TANH **ALPHA**

0.9562 (tanh 1.9)

Beispiel 2:

Berechne die folgenden inversen hyperbolischen Funktionen:

$\sinh^{-1} 2.4, \cosh^{-1} 90, \tanh^{-1} -0.65$

Tasten:

Anzeige:

2.4 **XEQ** **ALPHA** ASINH **ALPHA**

1.6094 ( $\sinh^{-1} 2.4$ )

90 **XEQ** **ALPHA** ACOSH **ALPHA**

5.1929 ( $\cosh^{-1} 90$ )

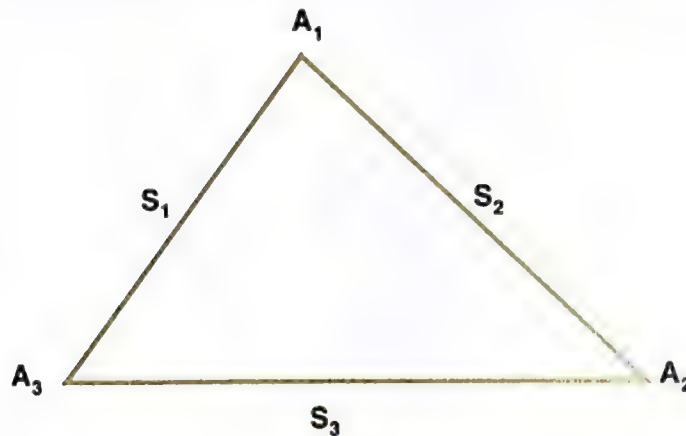
.65 **CHS**

**XEQ** **ALPHA** ATANH **ALPHA**

-0.7753 ( $\tanh^{-1} -0.65$ )

## DREIECKSBESTIMMUNGEN

Diese Programme können zur Bestimmung von Fläche, Seitenlänge ( $S_1, S_2, S_3$ ) und Winkel ( $A_1, A_2, A_3$ ) ebener Dreiecke eingesetzt werden.



Es werden einfach die drei bekannten Werte eingegeben und das entsprechende Programm gewählt. Der Rechner gibt Fläche, Seitenlängen und Winkel aus. Die Reihenfolge der Ausgabe hängt von der Reihenfolge der Eingabe ab. Werden die Eingabewerte nach dem Uhrzeigersinn um das Dreieck gewählt, so werden die errechneten Werte auch im Uhrzeigersinn ausgegeben. Die Reihenfolge ist:

erste eingegebene Seite	( $S_1$ )
anliegender Winkel	( $A_1$ )
anliegende Seite	( $S_2$ )
anliegender Winkel	( $A_2$ )
anliegende Seite	( $S_3$ )
anliegender Winkel	( $A_3$ )
Fläche	

### Gleichungen:

Alle Dreiecksseiten ( $S_1, S_2, S_3$ ) bekannt:

$$A_3 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{P(P - S_2)}{S_1 S_3}}$$

wobei  $P = (S_1 + S_2 + S_3)/2$

$$A_2 = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{P(P - S_1)}{S_2 S_3}}$$

$$A_1 = \cos^{-1} (-\cos(A_3 + A_2))$$

$A_3, S_1$  und  $A_1$  bekannt: Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite.

$$A_2 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_1))$$

$$S_2 = S_1 \frac{\sin A_3}{\sin A_2}$$

$$S_3 = S_1 \cos A_3 + S_2 \cos A_2$$

$S_1, A_1$  und  $A_2$  bekannt: Eine Seite und die beiden folgenden Winkel.

$$A_3 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_2))$$

Damit ist das Problem auf die  $A_3, S_1, A_1$  Lösung reduziert.

$S_1, A_1$  und  $S_2$  bekannt: Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel.

$$S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 S_1 S_2 \cos A_1}$$

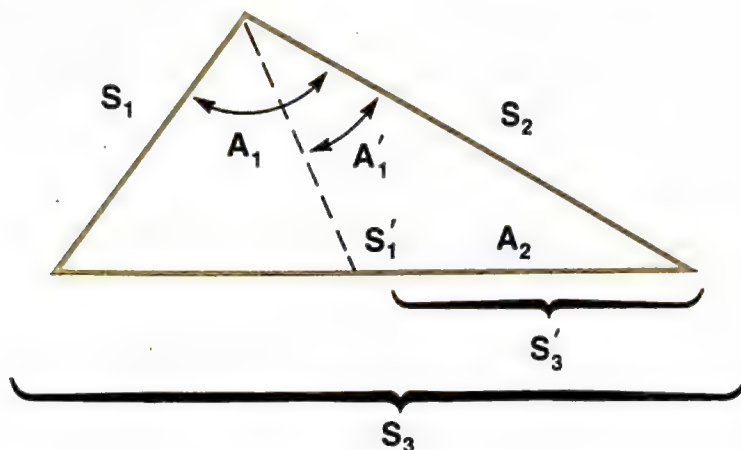
Damit ist das Problem auf die  $S_1, S_2, S_3$  Lösung reduziert.

$S_1, S_2$  und  $A_2$  bekannt: Zwei Seiten und der anliegende Winkel.

$$A_3 = \sin^{-1} \left[ \frac{S_2}{S_1} \sin A_2 \right]^*$$

$$A_1 = \cos^{-1}[-\cos(A_2 + A_3)]$$

Damit ist das Problem auf die  $A_3, S_1, A_1$  Lösung reduziert.



$$\text{Area} = 1/2 S_1 S_3 \sin A_3$$

\*Beachte: Es existieren zwei Lösungen für den Fall, daß  $S_2$  größer als  $S_1$  und  $A_3$  ungleich  $90^\circ$  ist. Beide möglichen Lösungen werden bestimmt.

**Anmerkungen:**

- Das Programm belegt die Register  $R_{00}$ - $R_{07}$ .
- Winkelangaben müssen dem Winkelmodus des Rechners entsprechen.
- Es ist zu beachten, daß das Dreieck in der Programmbeschreibung nicht der Standardnotation für Dreiecke entspricht, z. B. liegt  $A_1$  der Seite  $S_1$  nicht gegenüber.
- Winkel müssen als Dezimalzahl angegeben werden. Die  $\boxed{HR}$  Konversion kann dazu verwendet werden, Grad, Minuten und Sekunden in dezimale Winkelangaben umzuformen.
- Die numerische Genauigkeit kann für sehr kleine Winkel ungenügend sein.

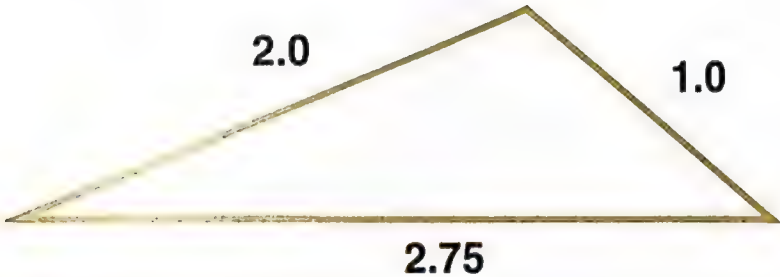
				Umfang: 008
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	entsprechenden Winkelmodus einstellen			
2.	anwendbaren Fall der untenstehenden Liste wählen und die angezeigten Werte eingeben:			
	alle Seiten bekannt	$S_1$ $S_2$ $S_3$	$\boxed{XEQ}$ SSS $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$	$S1=?$ $S2=?$ $S3=?$ $S1=$
	Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt	$A_3$ $S_1$ $A_1$	$\boxed{XEQ}$ ASA $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$	$A3=?$ $S1=?$ $A1=?$ $S1=$
	Zwei Winkel und anliegende Seite bekannt	$S_1$ $A_1$ $A_2$	$\boxed{XEQ}$ SAA $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$	$S1=?$ $A1=?$ $A2=?$ $S1=$
	Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt	$S_1$ $A_1$ $S_2$	$\boxed{XEQ}$ SAS $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$	$S1=?$ $A1=?$ $S2=?$ $S1=$
	Zwei Seiten und der anliegende Winkel bekannt	$S_1$ $S_2$ $A_2$	$\boxed{XEQ}$ SSA $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$ $\boxed{R/S}$	$S1=?$ $S2=?$ $A2=?$ $S1=$



Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
3.	Nach Schritt.2 können die Werte für Seiten und Winkel durch sukzessives Drücken von <b>R/S</b> angezeigt werden. Die letzte Angabe ist die Dreiecksfläche. Für den letzten Fall (SSA) gibt es zwei mögliche Lösungen, beide werden ausgegeben		<div><b>R/S</b> <b>R/S</b> <b>R/S</b> <b>R/S</b> <b>R/S</b> <b>R/S</b></div>	<div>A1= S2= A2= S3= A3= AREA=</div>

Beispiel 1:

Gesucht sind die Winkel (in Grad) und die Fläche des folgenden Dreiecks:



Tasten:

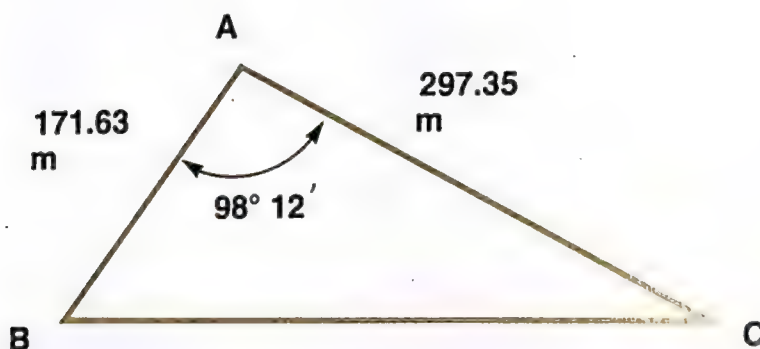
**XEQ** **ALPHA** **SIZE** **ALPHA** 008  
**XEQ** **ALPHA** **DEG** **ALPHA**  
**XEQ** **ALPHA** **SSS** **ALPHA**  
2 **R/S**  
1 **R/S**  
2.75 **R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**  
**R/S**

Anzeige:

S1=?  
S2=?  
S3=?  
S1=2.0000  
A1=129.8384  
S2=1.0000  
A2=33.9479  
S3=2.7500  
A3=16.2136  
AREA=0.7679

**Beispiel 2:**

Ein Landvermesser muß die Fläche und die Ausdehnung einer dreieckigen Parzelle bestimmen. Vom Punkt A werden die Abstände zu B und C mit einem elektronischen Längenmeßgerät bestimmt. Die Winkel zwischen AB und AC werden ebenfalls gemessen. Gesucht sind Fläche und die restlichen Seitenlängen.



Dies ist ein Seite-Winkel-Seite Problem mit:

$$S_1=171.63, A_1=98^\circ 12' \text{ und } S_2=297.35$$

**Tastenfolge:**

[XEQ] [ALPHA] SAS [ALPHA]  
 171.63 [R/S]  
 98.12 [XEQ] [ALPHA] HR [ALPHA]  
 [R/S]  
 297.35 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]  
 [R/S]

**Anzeige:**

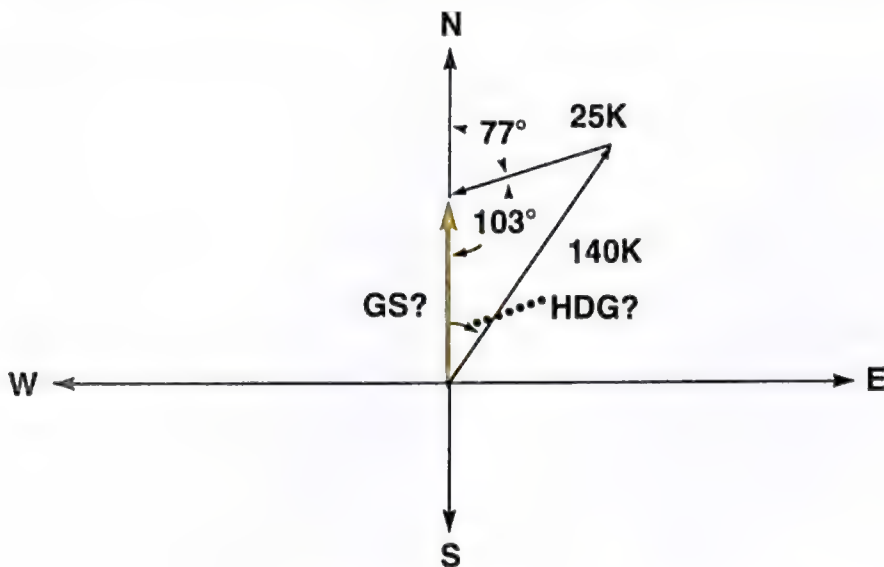
S1=?  
 A1=?  
 S2=?  
 S1=171.6300  
 A1=98.2000  
 S2=297.3500  
 A2=27.8270  
 S3=363.9118  
 A3=53.9730  
 AREA=25,256.2094

**Beispiel 3:**

Ein Pilot möchte genau nördlich fliegen. Die Windangabe ist 25 Knoten und 077°. Da Windrichtungen diejenige Richtung sind, aus der der Wind kommt, wird der Windwinkel in  $077^\circ + 180^\circ$  oder  $257^\circ$  umgerechnet. Die wahre Eigengeschwindigkeit des Flugzeug ist 140 Knoten. Welcher Steuerkurs muß – zur Kompensation der Abdrift durch den Wind – geflogen werden? Wie hoch ist die Geschwindigkeit über Grund?

Steuerkurs: HDG (HeaDinG) wahre Eigengeschwindigkeit: TAS (True Air Speed)

Geschwindigkeit über Grund: GS (Ground Speed) Windgeschwindigkeit: WV



Zieht man die Windrichtung von  $180^\circ$  ab (man erhält dabei einen Winkel von  $103^\circ$ ), reduziert sich das Problem auf eine  $S_1, S_2, A_2$  Lösung.

**Tastenfolge:**

**XEQ** **ALPHA** **SSA** **ALPHA**

140 **R/S**

25 **R/S**

103 **R/S**

**R/S**

**R/S**

**R/S**

**R/S**

**R/S**

**R/S**

**Anzeige:**

**S1=?**

**S2=?**

**A2=?**

**S1=140.0000** (TAS)

**A1=66.9798**

**S2=25.0000** (Wind velocity)

**A2=103.0000**

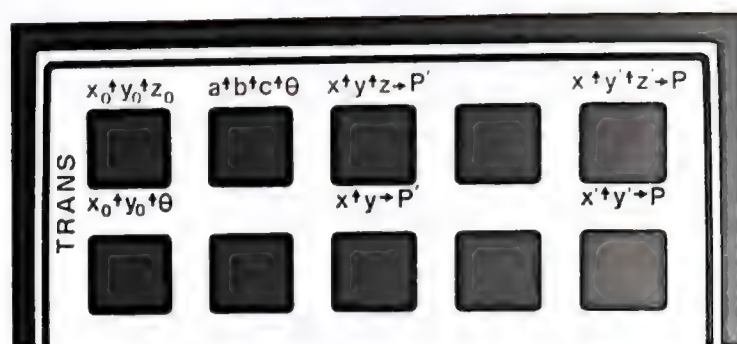
**S3=132.2407** (GS)

**A3=10.0202** (HDG)

**AREA=1,610.6428**

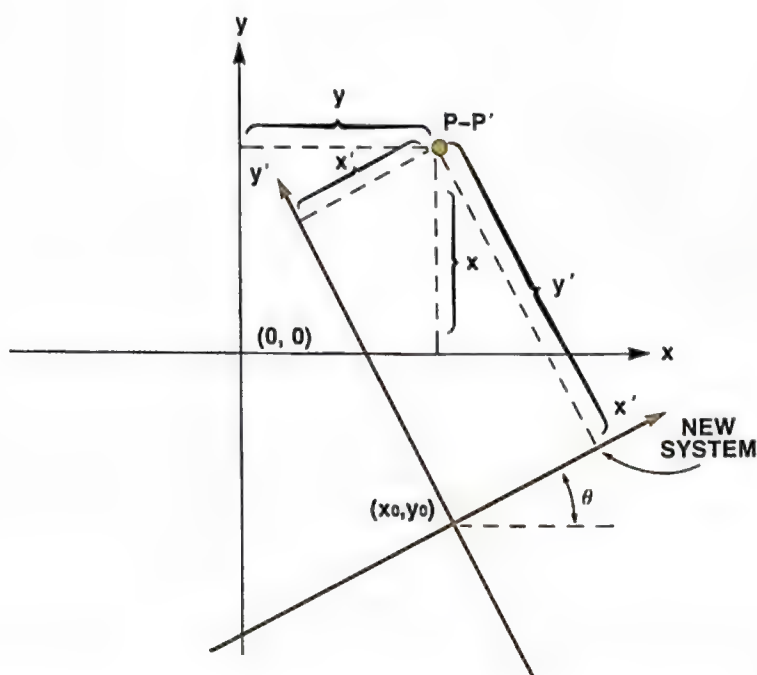
Somit muß der Pilot einen Steuerkurs von  $10.02^\circ$  (NNO) fliegen. Seine Geschwindigkeit über Grund beträgt 132.24 Knoten.

# KOORDINATENTRANSFORMATION







Dieses Programm bietet 2- und 3-dimensionale Koordinaten-Translation und/oder Rotation.

Für den 2-dimensionalen Fall sind die Koordinaten des Ursprungs des achsenverschobenen System und der Rotationswinkel relativ zum Ausgangssystem einzugeben, danach sind die neuen Achsen zu spezifizieren. (Ursprungskordinaten:  $(x_0, y_0)$ , Rotationswinkel:  $\theta$ ). Diese Größen werden mit der Taste **[A]** eingegeben. Danach können durch Drücken von **[C]** Punkte des ursprünglichen Systems mit  $(x, y)$  eingegeben und in das neue achsenverschobene und gedrehte System mit  $(x', y')$  abgebildet werden. Punkte des neuen  $(x', y')$ -Systems können durch Drücken von **[E]** in das ursprüngliche  $(x, y)$ -System abgebildet werden.





Der 3-dimensionale Fall ist dem 2-dimensionalen analog. Der einzige wichtige Unterschied betrifft die Angaben zur Drehung. Die Rotationsachse geht durch den verschobenen Ursprung  $(x_0, y_0, z_0)$  und ist parallel zu einem beliebigen Ortsvektor  $(a_i, b_j, c_k)$ . Das Vorzeichen des Rotationswinkels  $(\Theta)$  wird nach der Rechte-Hand-Regel und der Richtung des Rotationsvektors bestimmt. Beispielsweise in dem Spezialfall der 2-dimensionalen Rotation (Drehung nur in der  $(x,y)$ -Ebene) kann dies unter Verwendung eines Ortsvektors von  $(0, 0, 1)$  und einem positiven Drehwinkel – für Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn- bewerkstelligt werden. Die Koordinaten des verschobenen Ursprungs  $(x_0, y_0, z_0)$  werden mit  **A** eingegeben. Der Ortsvektor und der Drehwinkel werden mit  **B** eingegeben. Umwandlungen von ursprünglichen Systemen  $(x,y,z)$  in das neue System mit  $(x',y',z')$  werden mit  **C** initiiert, während der umgekehrte Vorgang mit  **E** erreicht wird.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$


wobei:

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2(1-\cos \theta)+\cos \theta & ab(1-\cos \theta)-c\sin \theta & ac(1-\cos \theta)+b\sin \theta \\ ba(1-\cos \theta)+c\sin \theta & b^2(1-\cos \theta)+\cos \theta & bc(1-\cos \theta)-a\sin \theta \\ ca(1-\cos \theta)-b\sin \theta & cb(1-\cos \theta)+a\sin \theta & c^2(1-\cos \theta)+\cos \theta \end{bmatrix}$$

Zweidimensionale Transformation werden als Spezialfall der Dreidimensionalen Transformation behandelt; dabei wird  $(a,b,c)$  auf  $(0,0,1)$  gesetzt.

Anmerkungen:

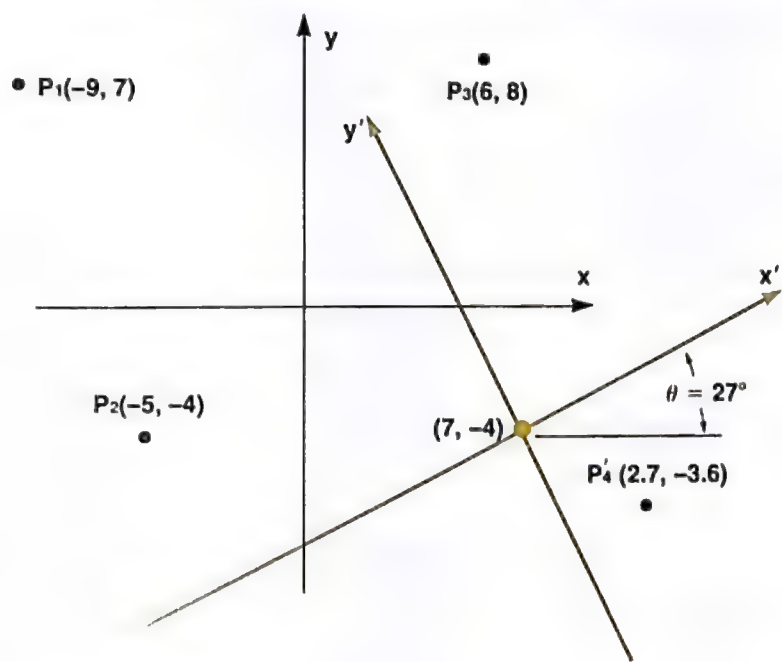
- Für reine Translation ist  $\theta = 0.0$  zu setzen.
- für reine Rotation sind  $x_0, y_0$  und  $z_0$  gleich Null zu setzen.
- das Programm belegt die Register 00-25

				Umfang: 026
Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
1.	Programm initialisieren und Maske auflegen.		 TRANS	0.0000
2.	für den 2-dimensionalen Fall: weiter mit Schritt 3  für den 3-dimensionalen Fall: weiter mit Schritt 6			

Nummer	Anweisung	Eingabe	Funktion	Anzeige
3.	Ursprung und Rotationswinkel des neuen Koordinatensystems eingeben	$x_0$ $y_0$ $\theta$	<b>ENTER</b> <b>ENTER</b> 1.0000 <b>A</b>	
4.	Transformieren der Koordinaten des alten Systems in das neue	$x$ $y$	<b>ENTER</b> <b>C</b> <b>R/S</b>	$x'$ $y'$
	oder aus dem neuen System in das alte	$x'$ $y'$	<b>ENTER</b> <b>E</b> <b>R/S</b>	$x$ $y$
5.	für ein weiteres Koordinatenpaar weiter mit Schritt 4. Bei einem neuen Koordinatensystem weiter mit Schritt 3.			
6.	Ursprung des verschobenen Koordinatensystems eingeben	$x_0$ $y_0$ $z_0$	<b>ENTER</b> <b>ENTER</b> <b>A</b>	$x_0$
	und Rotationsvektor und -Winkel eingeben	$a$ $b$ $c$ $\theta$	<b>ENTER</b> <b>ENTER</b> <b>ENTER</b> <b>B</b>	$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
7.	Koordinaten des ursprünglichen Systems in das neue System umwandeln.	$x$ $y$ $z$	<b>ENTER</b> <b>ENTER</b> <b>C</b> <b>R/S</b> <b>R/S</b>	$x'$ $y'$ $z'$
	oder aus dem translozierten und rotierten System in das ursprüngliche	$x'$ $y'$ $z'$	<b>ENTER</b> <b>ENTER</b> <b>E</b> <b>R/S</b> <b>R/S</b>	$x$ $y$ $z$
8.	für ein neues Koordinatenpaar weiter mit Schritt 7. für eine neue 3-dimensionale Transformation: weiter mit Schritt 6 (sowohl $(x_0, y_0, z_0)$ als auch $(a, b, c, \theta)$ können unabhängig voneinander geändert werden.			

Beispiel 1:

Gegeben seien die beiden untenstehenden Koordinatensysteme  $(x,y)$  und  $(x',y')$ :



Die Punkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  sollen in die äquivalenten Koordinaten des  $(x',y')$ -Systems überführt werden. Außerdem soll  $P_4$  in das  $(x,y)$ -System überführt werden. (Es werden Winkelgrade verwendet.)

Tastenfolge:

`XEQ ALPHA SIZE ALPHA 025`  
`XEQ ALPHA TRANS ALPHA`  
`7 ENTER 4 CHS ENTER`  
`27 A`  
`9 CHS ENTER 7 C`  
`R/S`  
`5 CHS ENTER 4 CHS C`  
`R/S`  
`6 ENTER 8 C`  
`R/S`  
`2.7 ENTER 3.6 CHS E`  
`R/S`

Anzeige:

`0.0000`  
`1.0000`  
`-9.2622` ( $x_1'$ )  
`17.0649` ( $y_1'$ )  
`-10.6921` ( $x_2'$ )  
`5.4479` ( $y_2'$ )  
`4.5569` ( $x_3'$ )  
`11.1461` ( $y_3'$ )  
`11.0401` ( $x_4$ )  
`-5.9818` ( $y_4$ )

Beispiel 2:

Ein 3-dimensionales Koordinatensystem wird in den Punkt (2.45, 4.00, 4.25) verschoben. Danach wird eine Drehung um  $62.5^\circ$  um die Achse (0, -1, -1) ausgeführt. Im ursprünglichen System hat ein bestimmter Punkt die Koordinaten (3.9, 2.1, 7.0). Was sind die Koordinaten dieses Punktes im neuen System?

56 Koordinatentransformation

Tastenfolge:

Anzeige:

<b>XEQ</b>	<b>ALPHA</b>	TRANS	<b>ALPHA</b>	
2.45	<b>ENTER</b>	4	<b>ENTER</b>	
4.25	<b>A</b>			<b>2.4500</b>
0	<b>ENTER</b>	1	<b>CHS</b>	<b>ENTER</b>
1	<b>CHS</b>	<b>ENTER</b>	62.5	<b>B</b>
3.9	<b>ENTER</b>	2.1	<b>ENTER</b>	<b>1.4142</b>
7	<b>C</b>			<b>3.5861</b>
<b>R/S</b>				<b>(x')</b>
<b>R/S</b>				<b>0.2609</b>
				<b>(y')</b>
				<b>0.5891</b>
				<b>(z')</b>

In dem neuen (verschobenen und gedrehten) Achsensystem hat der Punkt die Koordinaten (1, 1, 1). Was waren seine Koordinaten im ursprünglichen System?

Tastenfolge:

Anzeige:

1	<b>ENTER</b>	1	<b>ENTER</b>	
1	<b>E</b>			<b>2.9117</b>
<b>R/S</b>				<b>(x)</b>
<b>R/S</b>				<b>4.3728</b>
				<b>(y)</b>
				<b>5.8772</b>
				<b>(z)</b>



## ANHANG A

### PROGRAMM-DATEN

PROGRAMM	REGISTERZAHL FÜR COPY	DATEN REGISTER	FLAGS	ANZEIGE- FORMAT	WINKEL- MODUS
Matrixalgebra	138	(vgl. Register- belegungsplan)	02-10 21-22 25 29 00 21-22 00 02-03 21 21 27 01 21 01-02 21 29 21	FIX 4	RAD/DEG
Lösungen für $f(x)$	43	00-06			
Nullstellen und Funktions- werte von Polynomen	84	00-22		FIX 4	
Numerische Integration	27	00-07			
Differentialgleichungen	35	00-07			
Fourier-Analyse	50	00-26		FIX 4	
Komplexe Operationen	59	00-04			
Hyperbolische Funktionen	17	00			
Dreiecksberechnungen	46	00-07			
Koordinatentransformation	50	00-23			

SPEICHERBELEGUNGSPLAN FÜR MATRIZEN

Dimension	Anzahl Speichererweite- rungs-Module (RAM) (M)	Anzahl Register (R)	total	Anfangs- und Endadresse der Matrix	der Spalten	Register
N	$\text{INT} \left( \frac{N^2 + 2N + 15}{64} \right)$	$N^2 + 2N + 15$	00 to $N^2 + 2N + 14$	15 to $N^2 + 14$	$N^2 + 15$ to $N^2 + 2N + 14$	13 to $N^2 + N + 14$
1	0	18	00- 17	15- 15	16- 16	13- 16
2	0	23	00- 22	15- 18	19- 20	13- 20
3	0	30	00- 29	15- 23	24- 26	13- 26
4	0	39	00- 38	15- 30	31- 34	13- 34
5	0	50	00- 49	15- 39	40- 44	13- 44
6	0	63	00- 62	15- 50	51- 56	13- 56
7	1	78	00- 77	15- 63	64- 70	13- 70
8	1	95	00- 94	15- 78	79- 86	13- 86
9	1	114	00-113	15- 95	96-104	13-104
10	2	135	00-134	15-114	115-124	13-124
11	2	158	00-157	15-135	136-146	13-146
12	2	183	00-182	15-158	159-170	13-170
13	3	210	00-209	15-183	184-196	
14	3	239	00-238	15-210	211-224	

\*Die Matrix ist zeilenweise gespeichert. Jedes Element  $a_{ij}$  kann unter Verwendung der Formel: Registeradresse =  $N(i-1)+j+14$  erreicht werden.


Angaben zur Verwendung einzelner Anwender-Modul-Programme als Unterprogramme.

UNTER-PROGRAMM	MARKE	ANFANGSADRESSE	FLAG STATUS	ENDADRESSE	ANMERKUNGEN
Matrix Pivotieren	PVT	15 - N <sup>2</sup> + 14 *) R <sub>14</sub> Dimension	SF 04 CF 06 CF 07 CF 08 CF 09 CF 10 SF 21	00 - N <sup>2</sup> + 2N + 14 *)	Erlaubt das Überspringen der Fragen zur Matrix am Anfang des Programms.
Simultanes Gleichungs-system	SIMEQ	15 - N <sup>2</sup> + 14 und N <sup>2</sup> + N + 15 - N <sup>2</sup> + 2N + 14 *) R <sub>14</sub> Dimension	SF 04 SF 05 CF 06 CF 07 CF 08 CF 09 CF 10 SF 21	00 - N <sup>2</sup> + 2N + 14 *)	Überspringt die Fragen am Anfang. Der Spaltenvektor muß bereits gespeichert sein.
Lösungen für f(x) im Interval	SOL	R <sub>01</sub> Guess 1 R <sub>02</sub> Guess 2 R <sub>06</sub> Function Name	SF 21	R <sub>00</sub> -R <sub>00</sub> belegt	Beachte: Funktion muß eingegeben werden. Flag 00 wird im Programm verwendet.
Nullstellen von Polynomen	ROOTS	R <sub>00</sub> a <sub>0</sub> R <sub>01</sub> a <sub>1</sub> R <sub>02</sub> a <sub>2</sub> R <sub>03</sub> a <sub>3</sub> R <sub>04</sub> a <sub>4</sub> R <sub>22</sub> Degree	SF 21 SF 00	R <sub>00</sub> -R <sub>22</sub> belegt	Bestimmt alle Lösungen mit reellen Koeffizienten; Koeffizient des höchsten Grades muß 1 sein.

\*) vgl. Speicherbelegungsplan für Matrizen S. 58.







# HP – 41 C

## Mathematik-Paket I

### KURZBESCHREIBUNGEN DER PROGRAMME

#### MATRIXALGEBRA

Programm initialisieren: **XEQ** **MATRIX**

Anzahl (N) von Zeilen/Spalten eingeben, (N=14);  
**R/S** drücken.

Speicherumfang eingeben und weiter.

Matrixelemente  $A_{ij}$  zeilenweise eingeben, **R/S**  
drücken.

Diesen Schritt wiederholen, bis alle Elemente  
eingetragen sind.

Matrix mit **XEQ** **VIEW** ausgeben.

Matrix mit **XEQ** **EDIT** ändern:

Zeile i und Spalte j des neuen Elementes mit i  
**ENTER** j eingeben, **R/S** drücken.

Neuen Wert  $A_{ij}$  eingeben, **R/S** drücken.

Änderungsroutine EDIT mit **R/S** **R/S** beenden.

Determinante berechnen: **XEQ** **DET**.

Inverse bestimmen: **XEQ** **INV**.

Ergebnisse spaltenweise ausgeben: **R/S**

Lösen simultaner Gleichungen: **XEQ** **SIMEQ**.

Spaltenvektor B eingeben: B<sub>1</sub> **R/S**

restliche Werte von B ein- und Ergebnis ausgeben: **R/S**.

Spaltenvektor ausgeben: **XEQ** **VCOL**.

## LÖSUNGEN VON $f(x) = 0$ IN EINEM INTERVALL

Mindestumfang: 007

Funktion unter gewünschtem **GTO** **•** **•**

Label eingeben.

**PRGM**

**LBL**

.

.

.

**RTN**

**PRGM**

Programm initialisieren: **XEQ** **SOLVE**

Funktionsnamen eingeben: **R/S** drücken.

Sollen 2 Anfangsschätzungen eingegeben werden, deren erste eingeben: **R/S**

andernfalls leere Eingabe mit **R/S**.

Zweite Anfangsschätzung mit **R/S** eingeben.

# NULLSTELLEN UND FUNKTIONSWERTE VON POLYNOMEN

MINDESTUMFANG: 023

Programm initialisieren:  **POLY**

Polynomgrad  $n$  ( $n=2,3,4,5$ ) eingeben:

Koeffizienten  $a_j$  eingeben:

Schritt wiederholen bis **ROOTS?** in der Anzeige.

Um Lösungen zu bestimmen:  drücken.

Um Funktionswert zu berechnen, mit nein (N) antworten,  drücken.

$x$  eingeben,  drücken um  $f(x)$  auszugeben.

Für ein neues Polynom gleichen Grades, die Koeffizienten in  $R_{00}$ - $R_{04}$  ändern und  **ROOTS**.

## NUMERISCHE INTEGRATION

Mindestumfang: 008

### Diskreter Fall

Programm initialisieren:  **INTG**.

Abszissenintervallgröße eingeben:  drücken.

Funktionswert für  $x_j$  eingeben;  drücken.

Für  $j=0,1,\dots,n$  wiederholen.

Fläche nach der Trapezregel: **C**, nach  
SIMPSON berechnen: **D** .

## Explizite Funktionen

Funktion unter gewünschter **GTO** **•** **•**  
Marke eingeben.

**PRGM**

**LBL**

.

.

.

**RTN**

**PRGM**

Programm initialisieren: **XEQ** **INTG**.

Intervallgrenzen a und b eingeben:

a **ENTER** b **■** **A**

Anzahl der Teilintervalle eingeben und Fläche  
nach SIMPSON berechnen: **■** **B**.

Funktionsnamen eingeben, **R/S** drücken.

Sollen a,b, oder n geändert werden, so ist mit  
dem entsprechenden Schritt fortzufahren.

## DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Mindestumfang: 008

Funktion eingeben: **GTO** **•** **•**

**PRGM**

**LBL**

.

.

.

**RTN**

**PRGM**



Programm initialisieren: **XEQ** **DIFEQ**

Funktionsnamen eingeben: **R/S** drücken.

Ordnung der Differentialgleichung (1 oder 2) eingeben, **R/S** drücken.

Schrittweite eingeben: **R/S**

Anfangswert für x eingeben: **R/S**

Anfangswert für y eingeben: **R/S**

Für Gleichungen 2. Ordnung Anfangswert für  $y'$  eingeben: **R/S**.

Aufeinanderfolgende Werte für x und y durch Drücken von **R/S** ausgeben.

## FOURIER-ANALYSE

Mindestumfang: 008

Programm initialisieren: **XEQ** **FOUR**

Anzahl Stichproben in einer Periode eingeben; **R/S** drücken.

Anzahl der gewünschten Frequenzen eingeben; **R/S** drücken.

$y_n$  mit  $n=1, \dots, N$  eingeben; **R/S** drücken.

Schritt wiederholen bis **RECT?** angezeigt wird.

Zur Ausgabe in kartesischen Koordinaten: **R/S**.

Ausgabe der Koeffizienten in Polarform, N eingeben; **R/S** drücken.

Aufeinanderfolgende Koeffizienten mit **R/S** ausgeben.

Um den Wert von  $f(t)$  zu berechnen, USER-Modus einschalten, t eingeben und **E** drücken.

# KOMPLEXE OPERATIONEN

Mindestumfang: 005

## ARITHMETIK

Erste komplexe Zahl ( $x_1 + iy_1$ ) eingeben:

$y_1$  **ENTER**  $x_1$  **ENTER**

Zweite komplexe Zahl ( $x_2 + iy_2$ ) eingeben:

$y_2$  **ENTER**  $x_2$

$+$  **XEQ** **C+**

$-$  **XEQ** **C-**

$\times$  **XEQ** **C×**

$\div$  **XEQ** **C/**

## FUNKTIONEN

$z$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **XEQ** **MAGZ**

$1/z$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **XEQ** **CINV** **R/S**

$z^n$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **ENTER**  $n$   
**XEQ** **Z↑N** **R/S**

$z^{1/n}$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **ENTER**  $n$   
**XEQ** **Z↑1/N** **R/S**

$e^z$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **XEQ** **e↑Z** **R/S**

$\ln z$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **XEQ** **LNZ** **R/S**

$a^z$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **ENTER**  $a$   
**XEQ** **a↑Z** **R/S**

$a^{\log z}$   $y_1$  **ENTER**  $x_1$  **ENTER**  $a$   
**XEQ** **LOGZ** **R/S**



$z^w$     y2 [ENTER↑] x2 [ENTER↑] y1 [ENTER↑]  
           x1 [XEQ] Z↑/W [R/S]  
 $z^{1/w}$     [XEQ] Z↑1/W [R/S]

sin z    y1 [ENTER↑] x1 [XEQ] SINZ [R/S]  
 cos z    y1 [ENTER↑] x1 [XEQ] COSZ [R/S]  
 tan z    y1 [ENTER↑] x1 [XEQ] TANZ [R/S]

## HYPERBOLISCHE FUNKTIONEN

Mindestumfang: 001

sinh    x x [XEQ] SINH  
 cosh    x x [XEQ] COSH  
 tanh    x x [XEQ] TANH  
 $\sinh^{-1}$  x x [XEQ] ASINH  
 $\cosh^{-1}$  x x [XEQ] ACOSH  
 $\tanh^{-1}$  x x [XEQ] ATANH

## DREIECKSBERECHNUNGEN

Mindestumfang: 008

Alle Seitenlängen bekannt: [XEQ] SSS

Zwei Winkel und die eingeschlossene Seite bekannt: [XEQ] ASA

Zwei Winkel und die anliegende Seite bekannt: [XEQ] SAA

Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt: [XEQ] SAS

Zwei Seiten und der anliegende Winkel bekannt: [XEQ] SSA



Sind alle Fragen beantwortet, werden die Ergebnisse mit aufeinanderfolgenden **R/S** ausgegeben.

## KOORDINATENTRANSFORMATION

Mindestumfang: 026

Programm initialisieren: **XEQ** **TRANS**

### 2-DIMENSIONAL

Ursprungskoordinaten und Drehwinkel eingeben:

$x_0$  **ENTER↑**  $y_0$  **ENTER↑**  $\theta$  **A**

Koordinaten in verschobene und gedrehte überführen:  $x$  **ENTER↑**  $y$  **C** **R/S**.

Koordinaten rücktransformieren:

$x'$  **ENTER↑**  $y'$  **E** **R/S**.

### 3-DIMENSIONAL

Ursprungskoordinaten eingeben:

$x_0$  **ENTER↑**  $y_0$  **ENTER↑**  $z_0$  **■** **A**

Drehvektor und -winkel eingeben:

$a$  **ENTER↑**  $b$  **ENTER↑**  $c$  **ENTER↑**  $\theta$  **■** **B**

Koordinaten ins verschobene und rotierte System transformieren:

$x$  **ENTER↑**  $y$  **ENTER↑**  $z$  **■** **C** **R/S** **R/S**

Koordinaten rücktransformieren:

$x'$  **ENTER↑**  $y'$  **ENTER↑**  $z'$  **■** **E** **R/S** **R/S**



# HP-41C

## Math Pac

### Addendum Card

In the program "TRANS", clear Flag 01 before attempting to transform a point from the translated system back to the original system. If Flag 01 is not cleared, the results will be in error. This applies to both 2 and 3 dimensional cases.

The program "POLY" may calculate incorrect roots for fourth and fifth degree equations. To determine whether a calculated root is correct, rerun the Poly program and follow the instructions on page 22 for evaluating a function. When the program asks " $X = ?$ ", input the root in question. If the result is a very small number close to zero, then the root is correct. For fifth degree polynomials, only the second real root need be evaluated. For fourth degree polynomials, only the first real root need be evaluated.



HEWLETT  
PACKARD